

Quadratische Funktionen und ihre Gleichungen

Check-out

➤ Tipps

1. Welche Bedeutung haben die Parameter in einer Scheitelpunktsform?
1f) Das Zoomen (also Verkleinern oder Vergrößern von Bildern) ist wichtig, um wichtige Elemente des Graphen im Blick zu behalten.
2. Versuchen Sie die Parabel mit einem Funktionenplotter zu plotten und diese manuell zu verschieben oder nutzen Sie die Applets auf der Homepage.
3. Machen Sie sich Skizzen.
4. Was ist die Definition für die Definitions- bzw. Wertemenge? Nutzen Sie Graphen, also z.B. einen Funktionenplotter, durchaus auch mit Schieberegler.
5. Nutzen Sie Graphen. Bei b) gut aufpassen (oder den Tipp aus 1f) nochmals nutzen.
6. a) Was ist bei solchen Gleichungen gesucht? Welche Möglichkeiten, außer die pq-Formel, gibt es solche Gleichungen zu lösen? Besitzen andere Vorteile?
d) Was ist eine Diskriminante? Welche Bedingungen für diese führen zu welcher Anzahl von Lösungen?
e)/f) x-Wert: Bestimme die Nullstellen allgemein und nutze die angegebene Formel. Um den Funktionswert des Scheitelpunkts zu bestimmen, nutze die faktorisierte Form der Gleichung einer quadratischen Funktion $f(x) = a \cdot (x - m) \cdot (x - n)$. Was ist hier x_1 , was x_2 ?
7. Versuche Gemeinsamkeiten zu $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ zu finden.
8. Nutzen Sie Skizzen und die Funktionen von GeoGebra, um Lösungen zu suchen und zu überprüfen.
9. Nutzen Sie alle im Text vorkommenden Informationen und versuchen Sie, die vorkommenden Größen und Beziehungen algebraisch zu beschreiben. Eine beschriftete Skizze (vgl. Bilder im Buch) kann helfen.

➤ Aufgabe 1

- a) Für $f(x)$ lässt sich der Scheitelpunkt $S(-1|-1)$ in der Tabelle ablesen; um $x = -1$ herum sind die Funktionswerte symmetrisch angeordnet. Weiterhin können die Punkte geplottet werden und die Symmetrie und der Scheitelpunkt erkannt werden. algebraische Lösung $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ nun setze einen beliebigen Punkt aus der Tabelle aus $f(x)$ in diese Formel ein: $P(0|-2)$
- $$-2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$
- $$\rightarrow -2 = c$$
- nun zweiten und dritten Punkt $Q(1|-5)$ und $R(-2|-2)$ in $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x - 2$ einsetzen
- $$\rightarrow -5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 2$$
- $$\Leftrightarrow -5 = a + b - 2$$
- $$\Leftrightarrow -3 = a + b$$
- und

$$-2 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) - 2$$

$$\Leftrightarrow 0 = a \cdot 4 + b \cdot (-2)$$

Löse nun eine der Gleichungen nach a oder b auf und setze die Lösung in die jeweils andere Gleichung ein:

$$\rightarrow 2 \cdot b = a \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow b = 2 \cdot a$$

$$\rightarrow -3 = a + 2 \cdot a$$

$$\rightarrow -3 = 3 \cdot a$$

$$\rightarrow -1 = a$$

Nun setze a in die Gleichung $-3 = a + b$ ein, um b zu ermitteln, daraus folgt:

$$-3 = -1 + b$$

$$\Leftrightarrow b = -2$$

Somit erhalten wir die Funktionsgleichung:

$$f(x) = -1 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 2$$

Bringe nun diese Funktion in die Scheitelpunktform, um den Scheitelpunkt deutlich abzulesen:

$$f(x) = -1 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 2$$

$$= -1 \cdot (x^2 + 2 \cdot x + 2)$$

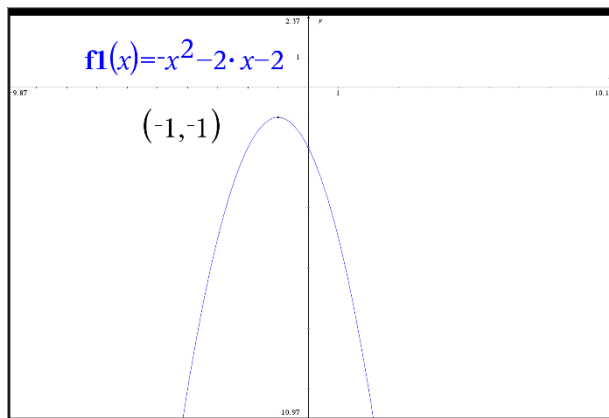
$$= -1 \cdot (x^2 + 2 \cdot x + 2 + 1 - 1)$$

$$= -1 \cdot (x^2 + 2 \cdot x + 1 + 1)$$

$$= -1 \cdot (x^2 + 2 \cdot x + 1) - 1$$

$$= -1 \cdot (x + 1)^2 - 1$$

Anhand der Scheitelpunktform erkennen wir den Schnittpunkt deutlich.



Diese Möglichkeiten gelten auch analog für g(x) bis j(x)

→g(x) muss den Scheitelpunkt bei der Stelle $x=-0.5$ besitzen (Symmetrie der Tabelle um -0,5. Dies geht sowohl aus der Tabelle als auch aus dem Graphen hervor. Nun wird $f(-0.5)$ gesucht. Dazu müssen wir die Funktionsgleichung für g(x) aufstellen.

$$g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Setze nun nacheinander 3 Punkte in die Gleichung ein und ermittle so analog zu a.) bei f(x) a, b und c. Das Ergebnis lautet: $g(x) = x^2 + x$.

Nun kann diese Funktionsgleichung wieder in die Scheitelpunktform gebracht werden, sodass wir als Ergebnis: $g(x) = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ erhalten und der Scheitelpunkt somit ablesbar ist mit $S(-\frac{1}{2} | -\frac{1}{4})$.

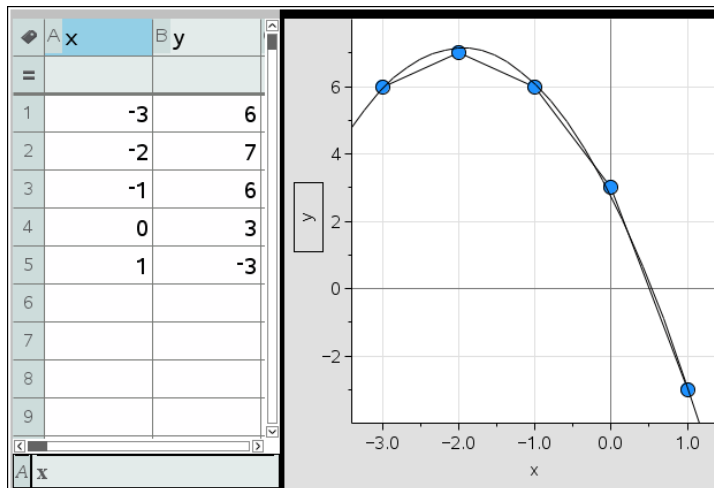
→h(x): Hier stellen wir zunächst wieder eine Funktionsgleichung auf, welche wir ggf. in die Scheitelpunktform bringen werden, damit der Scheitelpunkt abgelesen werden kann.

$$h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Setze nun nacheinander 3 Punkte in die Gleichung ein und ermittle so analog zu a.) bei $f(x)$ a, b und c. Das Ergebnis lautet: $h(x) = 2 \cdot x^2 - 18 \cdot x$.

Nun kann diese Funktionsgleichung wieder in die Scheitelpunktform gebracht werden, sodass wir als Ergebnis: $h(x) = (x - 4.5)^2 - 40.5$ erhalten und der Scheitelpunkt somit ablesbar ist mit $S(4.5|-40.5)$.

→Für $j(x)$ dies ist nicht möglich, da wir keine Funktionsgleichung aufstellen können, welche alle 5 Punkte abdeckt. ((1/-3) passt nicht, da die Differenz zum benachbarten Funktionswert 5 sein müsste.)



→ $k(x)$: Hierbei handelt es sich um die Scheitelpunktform, sodass der passende Scheitelpunkt abgelesen werden kann. Dieser lautet: $S(3|2)$.

→ $l(x)$: Auch hier können durch Umformungen die Funktionsgleichung in die Scheitelpunktform bringen, sodass der Scheitelpunkt aus dieser deutlich hervorgeht.

$$l(x) = -x^2 + 2 \cdot x + 4$$

$$\Leftrightarrow l(x) = -1 \cdot (x^2 - 2 \cdot x - 4) \text{ quadratische Ergänzung}$$

$$\Leftrightarrow l(x) = -1 \cdot (x^2 - 2 \cdot x + 1 - 1 - 4)$$

$$\Leftrightarrow l(x) = -1 \cdot (x - 1)^2 + 5$$

Nun erkennen wir, dass der Scheitelpunkt bei $S(1|5)$ liegt.

→ $m(x)$: Durch Umformungen erhalten wir auch hier die Scheitelpunktform.

So lautet das Ergebnis der Umformung und somit die Scheitelpunktform der Funktionsgleichung für $m(x) = -1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ und somit der Scheitelpunkt $S\left(\frac{1}{2} \mid 6.25\right)$.

→ G_n : Hier kann der Scheitelpunkt am angegebenen Funktionsgraphen abgelesen werden. Dieser lautet: $S(-4|-3)$

→ G_0 : Hier kann der Scheitelpunkt am angegebenen Funktionsgraphen abgelesen werden. Dieser lautet: $S(-4|-3)$

→ G_p : Hier kann der Scheitelpunkt am angegebenen Funktionsgraphen nicht direkt abgelesen werden, aber von den Nullstellen ausgehend erschlossen werden, da die x-Koordinate des Scheitelpunktes in der Mitte zwischen den Nullstellen liegt ($\frac{1+7}{2} = 4$). y-Koordinate: $f(6) - f(7) = 5$. Die Punkte sind aber gerade 2 bzw. 3 Einheiten von der Stelle des Scheitelpunktes entfernt. Auch bei der Normalparabel ist die Differenz $f(3) - f(2) = 5$. Also liegt eine verschobene Normalparabel vor.

Sie können aber auch wieder ein Gleichungssystem aufstellen: $G_p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Wir lesen drei Punkte vom Funktionsgraphen ab. Bspw. $P(1|0)$, $Q(7|0)$ und $R(2|5)$.

Einsetzen und LGS lösen ergibt: $G_P(x) = -1 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 7$. Nun kann diese Form der Funktionsgleichung in die Scheitelpunktform gebracht werden, sodass der Scheitelpunkt deutlich abzulesen ist. Wir erhalten nach der Umformung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung: $G_P(x) = -1 \cdot (x - 4)^2 + 9$

Scheitelpunkt S (4|9).

- b) Graph von $f(x)$ stellt eine nach unten geöffnete und verschobene Normalparabel dar.
Graph von $g(x)$ stellt eine nach oben geöffnete, jedoch verschobene Normalparabel.
Graph von $h(x)$ ist eine gestreckte und nach oben geöffnete Parabel.

Graph von $j(x)$: Keine Aussage möglich.

Graph von $k(x)$ stellt eine nach unten geöffnete, verschobene Normalparabel dar.

Graph von $l(x)$ stellt eine nach unten geöffnete, verschobene Normalparabel dar.

Graph von $m(x)$: stellt eine nach unten geöffnete, verschobene Normalparabel dar.

$G_n(x)$ ist eine nach oben geöffnete, gestauchte und verschobene Parabel.

$G_o(x)$ ist eine nach unten geöffnete, gestauchte und verschobene Parabel.

$G_P(x)$ ist eine nach unten geöffnete, verschobene Normalparabel.

allgemein gilt :

gestreckt ist eine Parabel, sofern gilt: $|a| > 1$

gestaucht ist eine Parabel, sofern gilt: $0 < |a| < 1$

mit $a = 1$ ist es eine Normalparabel

- c) Gesucht sind die Nullstellen der Funktionen. Diese lassen sich durch händisches Lösen einer Gleichung, mithilfe eines CAS, tabellarisch oder zeichnerisch lösen. Rechnerisch können die Nullstellen ermittelt werden, indem die Funktionsgleichungen gleich Null gesetzt werden.

$$\rightarrow f(x) = -x^2 - 2 \cdot x - 2$$

$$\text{Setze } f(x) = 0$$

$$-x^2 - 2 \cdot x - 2 = 0 \quad | \cdot -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 2}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Nicht definiert in \mathbb{R} , somit erhalten wir keine Lösungen.

$$\rightarrow g(x) = x^2 + x$$

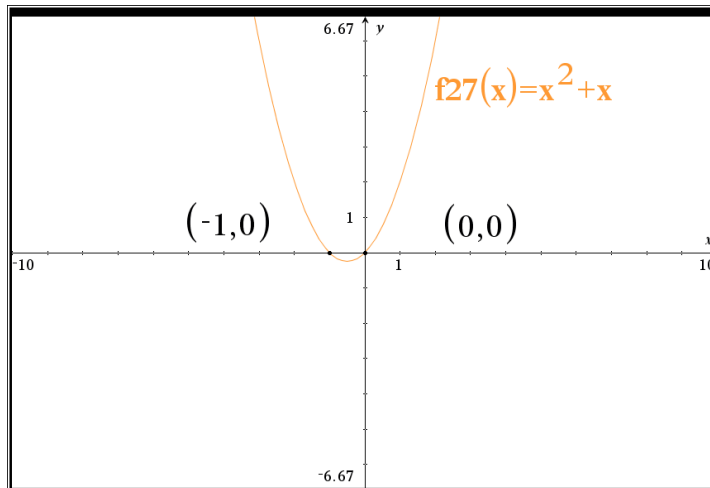
$$\text{Setze } g(x) = 0$$

$$x^2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = -1.$$



$$\rightarrow h(x) = 2 \cdot x^2 - 18 \cdot x$$

$$\text{Setze } h(x) = 0$$

$$2 \cdot x^2 - 18 \cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (2 \cdot x - 18) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ und } 2 \cdot x_2 - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 9.$$

$\rightarrow j(x)$: keine Aussage möglich, da keine Funktion vorliegt.

$$\rightarrow k(x) = -x^2 + 6 \cdot x - 7$$

$$\text{Nun setze } k(x) = 0$$

$$-x^2 + 6 \cdot x - 7 = 0 \mid \cdot -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6 \cdot x + 7 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 7}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 7}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}$$

Somit erhalten wir zwei Lösungen: $x_1 = 3 - \sqrt{2}$ und $x_2 = 3 + \sqrt{2}$

$$\rightarrow l(x) = -x^2 + 2 \cdot x + 4$$

$$\text{Nun setze } l(x) = 0$$

$$-x^2 + 2 \cdot x + 4 = 0 \mid \cdot -1$$

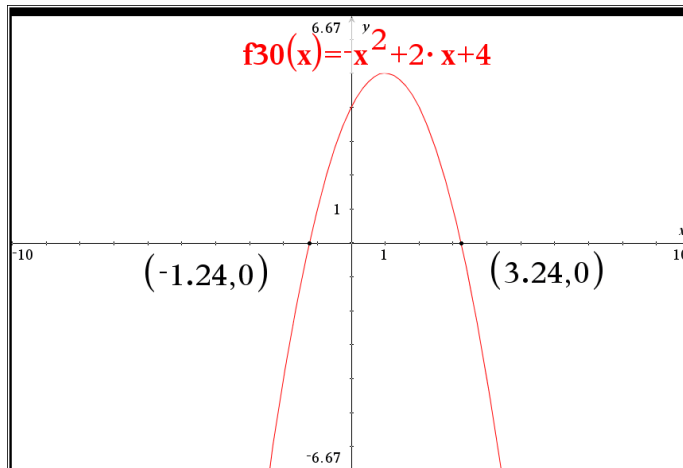
$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 4}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

Somit erhalten wir zwei Lösungen: $x_1 = 1 + \sqrt{5}$ und $x_2 = 1 - \sqrt{5}$.



$$\rightarrow m(x) = -x^2 + x + 6$$

Nun setze $l(x) = 0$

$$-x^2 + x + 6 = 0 \quad | \cdot -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

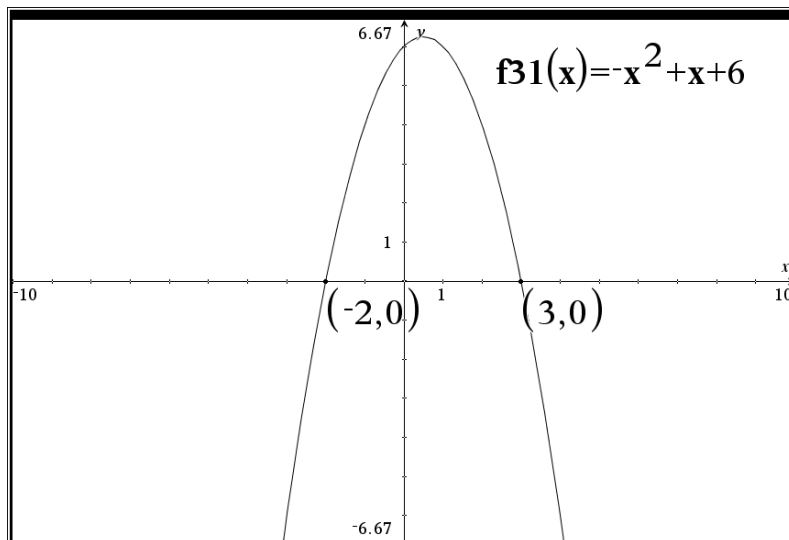
p-q-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 6}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Somit erhalten wir zwei Lösungen: $x_1 = 3$ und $x_2 = -2$



$$\rightarrow G_n(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2 \cdot x + 1$$

Nun setze $G_n(x) = 0$

$$\frac{1}{4}x^2 + 2 \cdot x + 1 = 0 \quad | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8 \cdot x + 4 = 0 \quad x_{1,2} = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 4}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 4}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{12}$$

Somit erhalten wir zwei Lösungen (Nullstellen):

$$x_1 = -4 + \sqrt{12} \text{ und } x_2 = -4 - \sqrt{12}$$

$$\rightarrow G_0(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 - 4 \cdot x - 11$$

Nun setze $G_0(x) = 0$

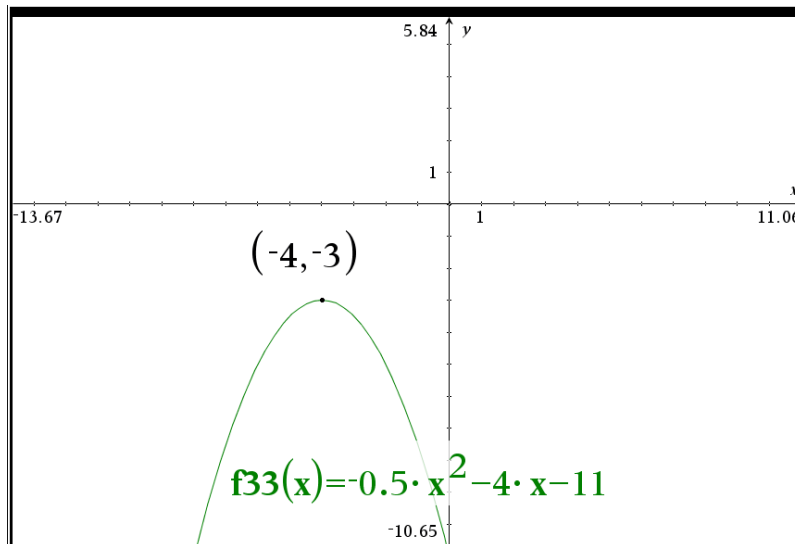
$$-\frac{1}{2} \cdot x^2 - 4 \cdot x - 11 = 0 \quad | \cdot -2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8 \cdot x + 22 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 22}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 22}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{-6} \text{ nicht definiert in } \mathbb{R}.$$



Somit erhalten wir keine Lösungen.

$$\rightarrow G_p(x) = -1 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 7$$

Nun setze $G_p(x) = 0$

$$-1 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 7 = 0 \quad | \cdot -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8 \cdot x + 7 = 0 \quad | \text{ mit Hilfe der p - q -}$$

Formel können nun die Nullstellen ermittelt werden

$$\Leftrightarrow \text{für } p = -8 \text{ und } q = 7$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

dies gilt auch für eine mögliche zweite Lösung x_2

$$x_{1,2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 7}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 7}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{9}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = 4 \pm 3$$

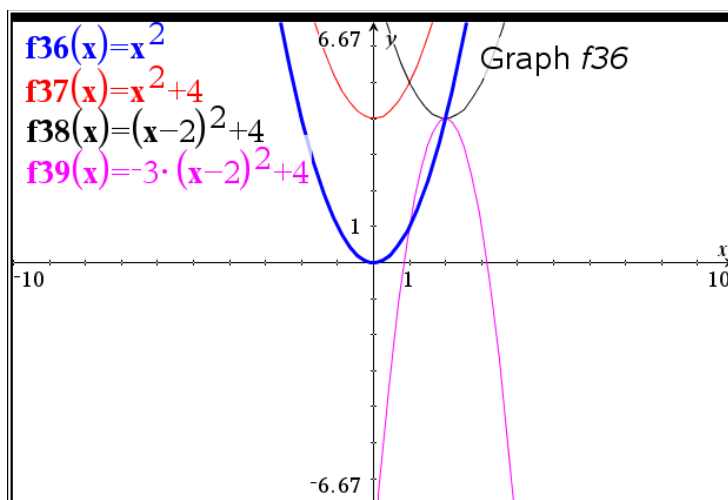
Somit erhalten wir zwei Lösungen:

$$x_1 = 7 \text{ und } \Leftrightarrow x_2 = 1.$$

- d) $\rightarrow f(x) = -1 \cdot (x + 1)^2 - 1$
 $\rightarrow g(x) = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$
 $\rightarrow h(x) = (x - 4.5)^2 - 40.5$
 $\rightarrow j(x)$ keine quadratische Funktion
 $\rightarrow k(x) = -x^2 + 6 \cdot x - 7$
 $\rightarrow l(x) = -x^2 + 2 \cdot x + 4$
 $\rightarrow m(x) = -x^2 + x + 6$
 $\rightarrow G_n(x) = \frac{1}{4} \cdot (x + 4)^2 - 3$
 $\rightarrow G_o(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x + 4)^2 - 3$
 $\rightarrow G_p(x) = -1 \cdot (x - 4)^2 + 9$
- e) \rightarrow passende Sachsituationen. Hier ist ein zentraler Knackpunkt, wie Sie die negativen Funktionswerte interpretiert haben.
 Für $f(x)$:
 Ein Wurf (im Bergwerk). (die Parameter könnte man hineinformulieren, indem man den höchsten Punkt des Wurfs $(-1|-1)$ angibt und einen Startpunkt, ab dem geworfen wird z.B. $(-3|-5)$)
 Für $g(x)$:
 (Tiefhängende) Wäscheleine. (die Parameter könnte man hineinformulieren, indem man den tiefsten Punkt der Leine und Aufhängepunkte angibt).
 Für $h(x)$:
 Wie bei $g(x)$, nur enger.

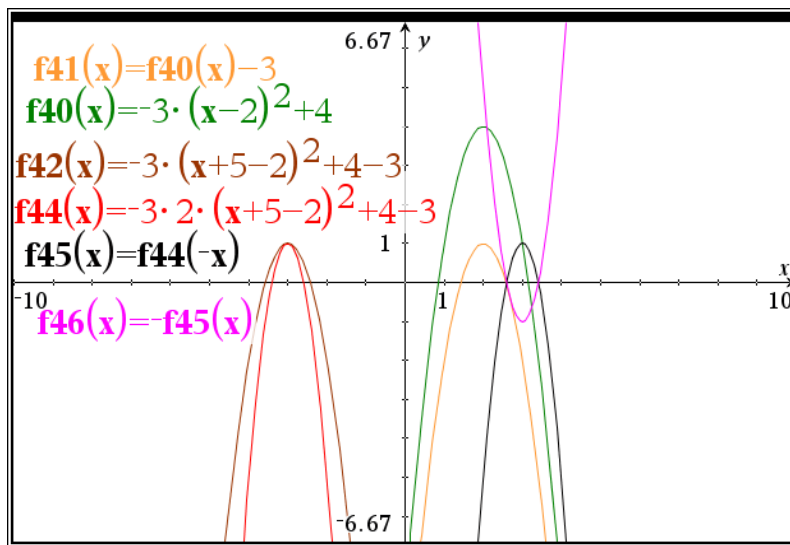
➤ Aufgabe 2: Transformationen von Parabeln

- a) Zuerst wurde der Graph $f(x) = x^2$ um vier Einheiten nach oben verschoben, sodass $f(x) = x^2 + 4$ entsteht. (Aus blau wird rot)
 Anschließend wird der Graph um zwei Einheiten nach rechts verschoben, sodass $f(x) = (x - 2)^2 + 4$ entsteht. (Aus rot wird schwarz)
 Zuletzt wird mit dem Faktor -3 gestreckt, sodass $f(x) = -3(x - 2)^2 + 4$ entsteht. (Aus schwarz wird pink, die Reihenfolge ist aber beliebig)
 Um wieder zum blauen Graphen zu gelangen, gehe die Schritte rückwärts und vollziehe dabei das Gegenteil der ursprünglichen Operationen.

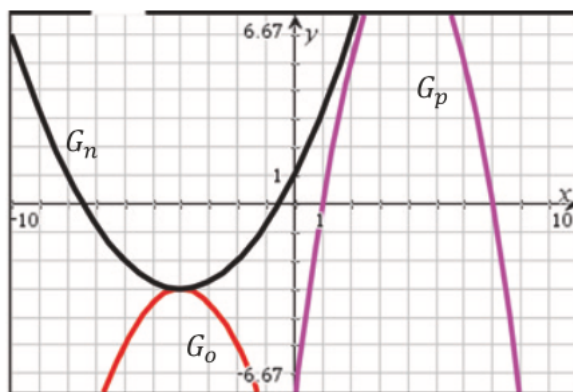


- b) Ja, dies ist möglich, alle möglichen Reihenfolgen funktionieren. Die Reihenfolge ist also wirklich beliebig. Wie man sehen kann, wenn man hier experimentiert hat.

- c) $f(x) = -3(x-2)^2 + 4$ zu $f_{41}(x) = -3(x-2)^2 + 1$ zu $f_{42}(x) = -3(x+3)^2 + 1$ zu
 $f_{44}(x) = -6(x+3)^2 + 1$ zu $f_{45}(x) = -6(x-3)^2 + 1$ zu $f_{46}(x) =$
 $6(x-3)^2 - 1$



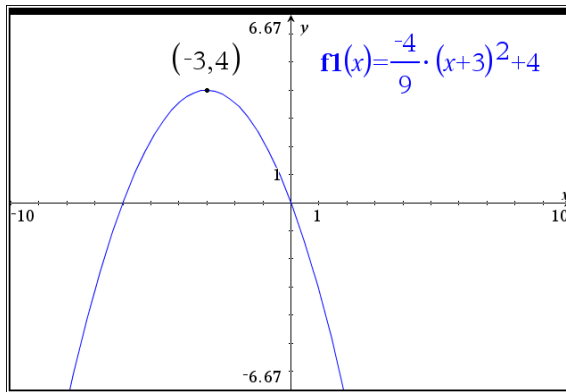
- d) Individuell (zum Kontrollieren die Graphen der einzelnen Schritte plotten).
 e) G_n zu G_p : $G_p(x) = -0,5 \cdot (x+4)^2 - 3$, 8 nach rechts, an x-Achse spiegeln, 6 nach oben, mit dem Faktor 2 strecken und man erhält $G_p(x) = -1 \cdot (x-4)^2 + 9$



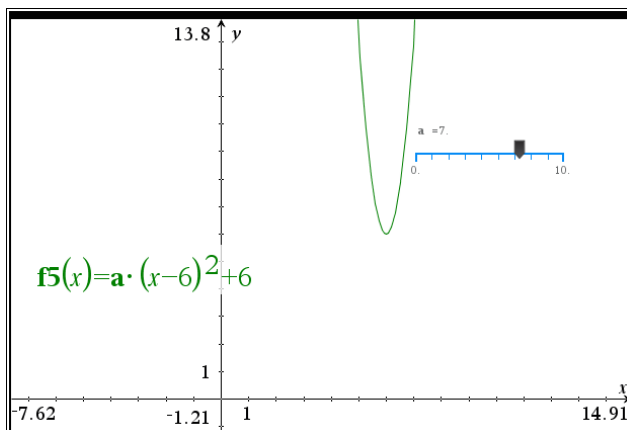
➤ Aufgabe 3: Steckbriefaufgaben: Parabeln gesucht

- a) Nutze die Scheitelpunktsform und bestimme den fehlenden Streckfaktor durch Einsetzen des Punktes (0|0). $f(x) = a(x+3)^2 + 4$

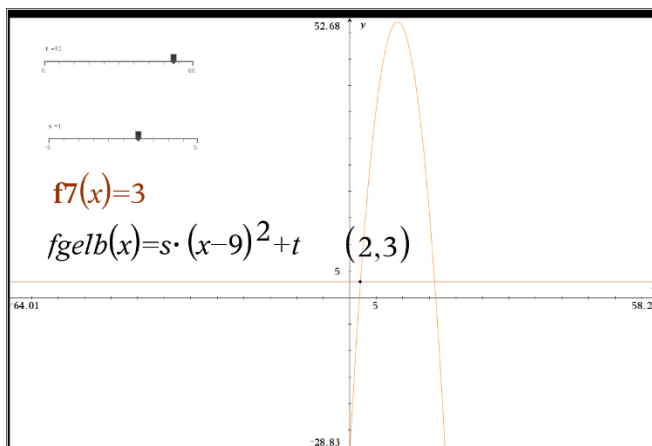
$$a(0+3)^2 + 4 = 0 \Rightarrow 9a + 4 = 0 \Rightarrow a = -\frac{4}{9}$$



- b) Dies ist nicht möglich, da:
 $a(9 + 3)^2 + 4 = 4$
 $\Rightarrow 144a = 0$
 $\Rightarrow a = 0$, doch für diesen Fall wäre es keine Parabel mehr,
 sodass wir keine Lösung erhalten.
- c) Nutze die Produktform, dann sind die Nullstellen passend einzusetzen. Es gibt aber unendliche viele Parabeln, da noch beliebig gestreckt / gestaucht werden kann:
 $f(x) = c \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$
- d) $f(x) = a \cdot (x - 6) + d$ mit $a > 0$, denn nur die Lage des Scheitelpunktes und die Öffnung (nach oben, $a > 0$) ist vorgegeben.



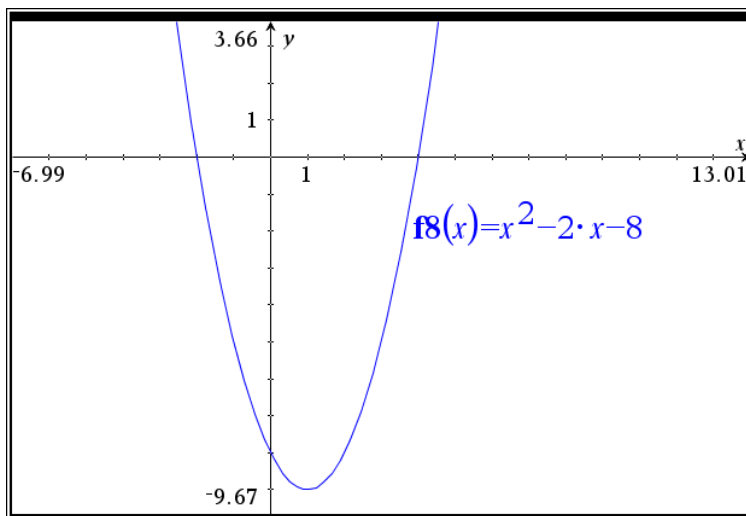
- e) $f(x) = a \cdot (x - 9) + d$ mit $a < 0$, Ein Parameter ist mit dem Punkt $(2|3)$ eliminierbar.
 $a \cdot (2 - 9) + d = 3 \Leftrightarrow -7a + d = 3 \Leftrightarrow d = 7a + 3$, also $f(x) = a \cdot (x - 9) + 7a + 3$



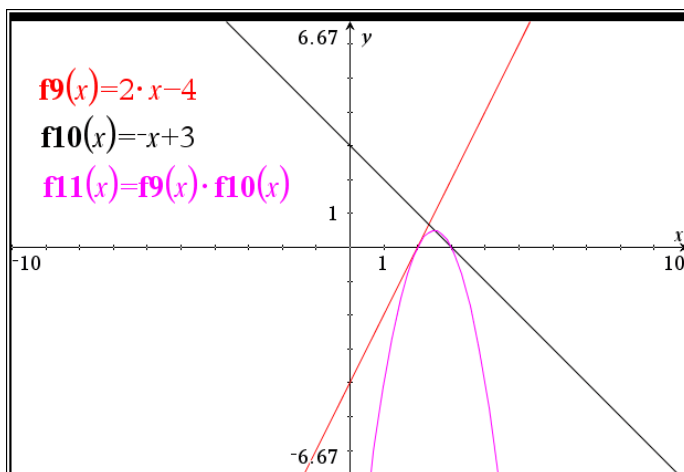
- f) Bestimme c durch Berechnung oder Verschieben der Normalparabel.

$$f(x) = x^2 - 2x + q \text{ und Nullstelle } x = 4$$

$$4^2 - 2 \cdot 4 + q = 0 \Leftrightarrow q = -8$$

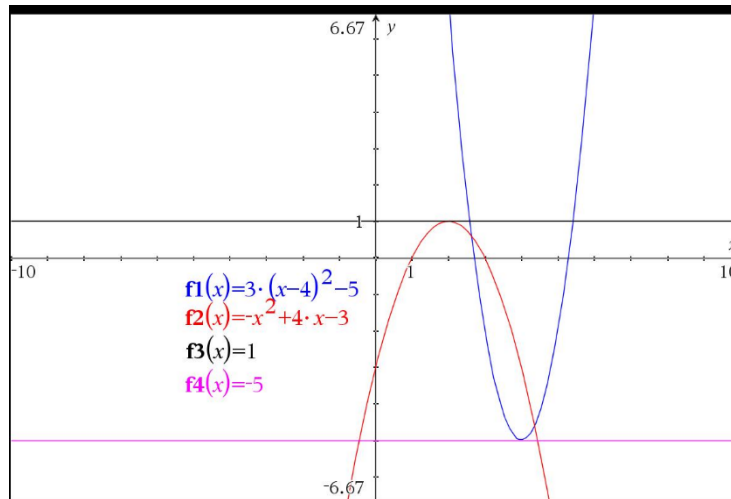


- g) $f(x) = (2x - 4) \cdot (-x + 3) = -2x^2 + 10x - 12 = -2(x^2 - 5x + 2,5^2) - 2,5^2 - 12$.
Der Graph steigt im Intervall $(-\infty; 2,5]$ (siehe Abb. oder Gleichung).



➤ Aufgabe 4: Formale Aspekte und Argumentationen

- a) (1) Definitionsmenge: $x \in \mathbb{R}$ (da man jeden beliebigen Wert für x einsetzen kann) und Wertemenge: $x \in [-5, \infty)$ (da der kleinste Funktionswert am Scheitelpunkt (4|-5) vorliegt, denn die Parabel ist nach oben geöffnet).
- (2) Definitionsmenge: $x \in \mathbb{R}$ und Wertemenge: $x \in (-\infty, 1]$ (da Scheitelpunkt (2|1) und Parabel nach unten geöffnet).



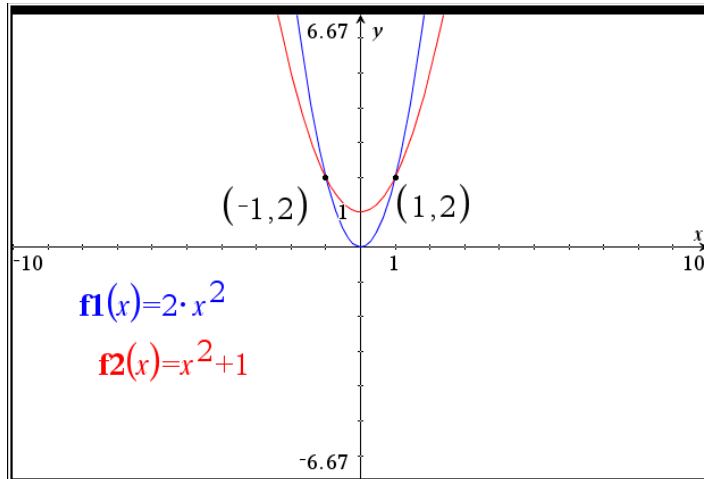
- b) Alle Lösungen kann man so beschreiben: $f(x) = a(x + z)^2 - 2$ mit $a < 0$ ist nach unten geöffnet und hat den größten Wert 2 am Scheitelpunkt $(-z|2)$.
- c) Kürzester Weg: Sie Setzen $b + 1$ statt b in die Formel für den Scheitelpunkt der Normalenform ein. Also statt: $(-\frac{b}{2a} | c - \frac{b^2}{4a^2})$ ((Achtung Druckfehler auf S. 163 im Buch. Hier ist die Formel nicht richtig abgedruckt.)) Neuer Scheitelpunkt: $(-\frac{b+1}{2a} | c - \frac{(b+1)^2}{4a})$. Also ist der neue Scheitelpunkt um $\frac{1}{2a}$ nach links verschoben (wenn $a > 0$) und um $\frac{2b+1}{4a}$ nach unten.
- Längerer Weg: Sie haben den Parameter b in der Normalform verändert. Erhöhen von Parameter b um 1 $f(x) = ax^2 + (b + 1)x + c$. Bestimme Scheitelpunktsform:
 $f(x) = a(x^2 + \frac{b+1}{a}x) + c = a(x^2 + \frac{b+1}{a}x + \frac{(b+1)^2}{4a^2} - \frac{(b+1)^2}{4a^2}) + c = a(x + \frac{b+1}{2a})^2 - \frac{(b+1)^2}{4a} + c$. Neuer Scheitelpunkt: $(-\frac{b+1}{2a} | c - \frac{(b+1)^2}{4a})$. Dann siehe kürzester Weg oben. Analog für $-l$.
- d) Der Parameter t ist verantwortlich für die Verschiebung des Scheitelpunktes parallel zur x -Achse und die Stauchung und Streckung der Parabel. Das kann man so sehen: Der Scheitelpunkt ist an der Stelle an das, was in der Klammer steht 0 ist (denn sonst ist der Wert des Quadrats der Klammer größer). Aus $tx - e = 0$ folgt, dass $x = \frac{e}{t}$ für $t \neq 0$. Je betragsmäßig größer t ist, desto mehr wird der Graph in der Richtung der x -Achse gestaucht, was bedeutet, dass der Scheitelpunkt sich der y -Achse nähert und gleichzeitig der Graph anschaulich enger wird. Näher sich t hingegen dem Wert 0 , so wird die Parabel breiter und der Scheitelpunkt entfernt sich von der y -Achse. (Auf die Verschiebung in Richtung der x -Achse hat natürlich auch der Parameter e und auf die Streckung Stauchung in Richtung der y -Achse auch der Parameter d Einfluss.)

➤ Aufgabe 5: Schnittpunkte von Graphen bestimmen

- a) Es gibt die Möglichkeiten die Schnittpunkte für 1 und 2, 2 und 3 sowie 3 und 1. Schnittpunkte von $g(x)$ und $h(x)$. Funktionsterme gleichsetzen.
 $f(x) = g(x)$
 $2 \cdot x^2 = x^2 + 1 \mid -x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ oder $x = 1$
 Die Ergebnisse in eine der beiden Funktionsgleichungen einfügen, um den jeweils passenden Funktionswert zu ermitteln. Setze nun $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ in $f(x)$ sodass: $f(1) = 2$ und $f(-1) = 2$
 Somit erhalten wir die Schnittpunkte $S(1|2)$ und $T(-1|2)$.

solve($2 \cdot x^2 = x^2 + 1, x$)
 $x = -1$ or $x = 1$

Graphische Überprüfung:



Schnittpunkte von $g(x)$ und $h(x)$ bestimmen. Funktionsterme gleichsetzen.

Dann ergibt sich:

$$x^2 + 1 = -x^2 + 4x + 9$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = -\sqrt{5} \text{ oder } x - 1 = \sqrt{5}$$

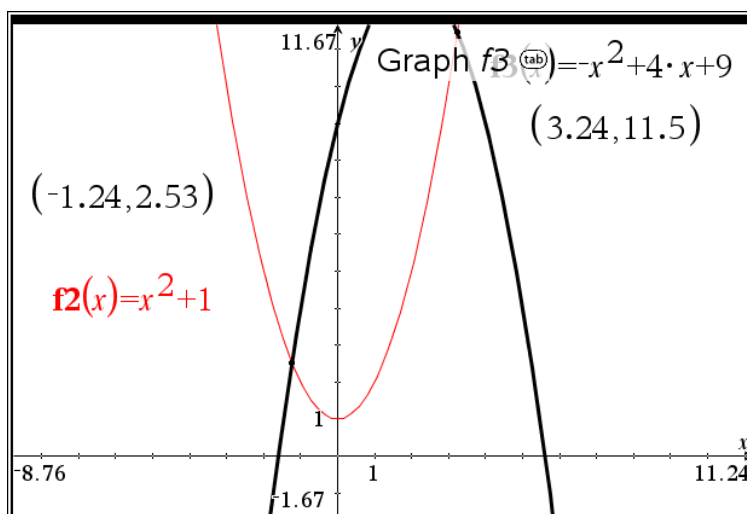
$$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{5} \text{ oder } x = 1 + \sqrt{5}$$

Funktionswerte der Schnittpunkte bestimmen:

$$f(1 - \sqrt{5}) = (1 - \sqrt{5})^2 + 1 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 + 1 = 7 - 2\sqrt{5}$$

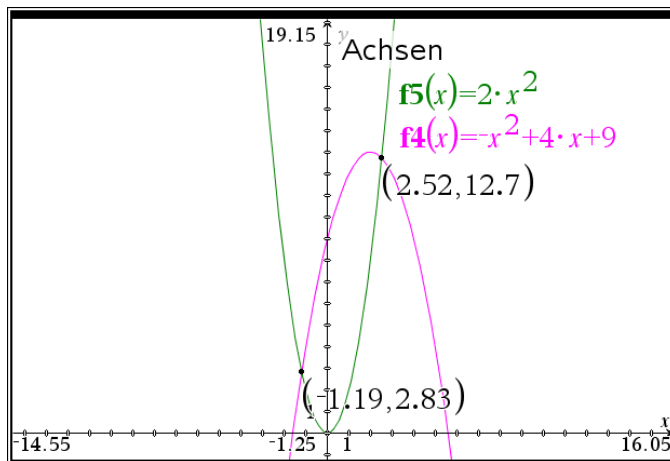
$$f(1 + \sqrt{5}) = (1 + \sqrt{5})^2 + 1 = 1 + 2\sqrt{5} + 5 + 1 = 7 + 2\sqrt{5}$$

Graphisch:



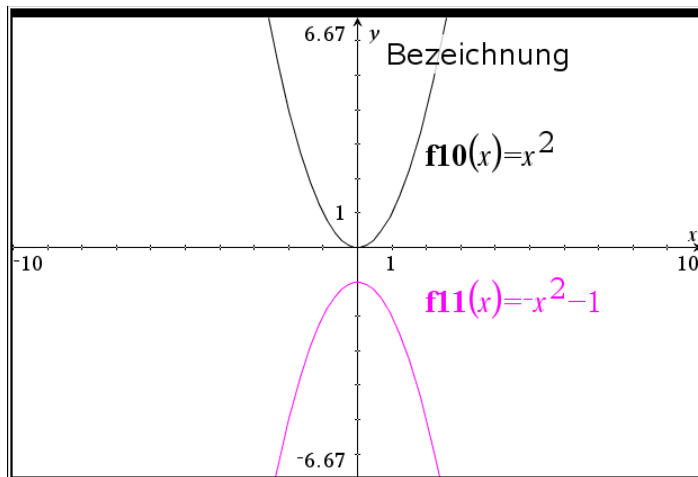
Schnittpunkte der Graphen von $f(x)$ und $h(x)$:

$$\begin{aligned}
 2x^2 &= -x^2 + 4x + 9 \\
 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 9 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^2 - \frac{4}{3}x - 3 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} - 3 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 &= \frac{31}{9} \\
 \Leftrightarrow x - \frac{2}{3} &= -\frac{\sqrt{31}}{3} \text{ oder } x - \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{31}}{3} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{31}}{3} \text{ oder } x = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{31}}{3}
 \end{aligned}$$

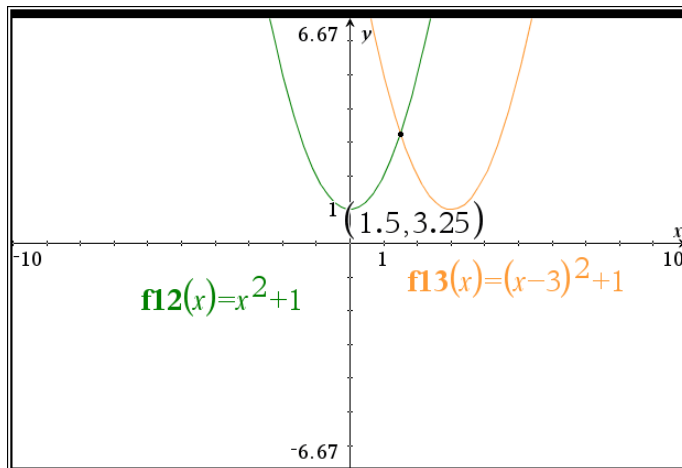


- b) Graph zu f_1 und Graph zu f_2 besitzen zwei Schnittpunkte, auch wenn man nur einen sieht. Dass es einen zweiten Schnittpunkt gibt, kann man sich so klarmachen:
- Am Ende wächst eine Parabel (ein Quadrat) immer schneller als ein linearer Ausdruck.
 - Wenn Sie sich die Gleichung zur Bestimmung des Schnittpunktes aufschreiben, werden Sie sehen, dass diese zwei Lösungen haben kann und hat.
 - Wenn Sie das Bild selbst plotten und herauszoomen, können Sie sehen, dass die Parabel doch noch erheblich an Fahrt aufnimmt gegenüber der Geraden.
 - Wenn Sie betragsmäßig große Werte einsetzen, sehen Sie dies auch.
- Die Graphen zu f_3 und f_4 besitzen nur einen gemeinsamen Schnittpunkt bei $S(1.5|2.25)$. Dies ist der Fall, da der Graph zu f_4 eine nach rechts verschobene Normalparabel darstellt und beide Funktionen somit die gleiche Form besitzen und somit der Verlauf gleichsam „parallel“ ist.

c) c.1 Zwei Parabeln haben keinen Schnittpunkt:

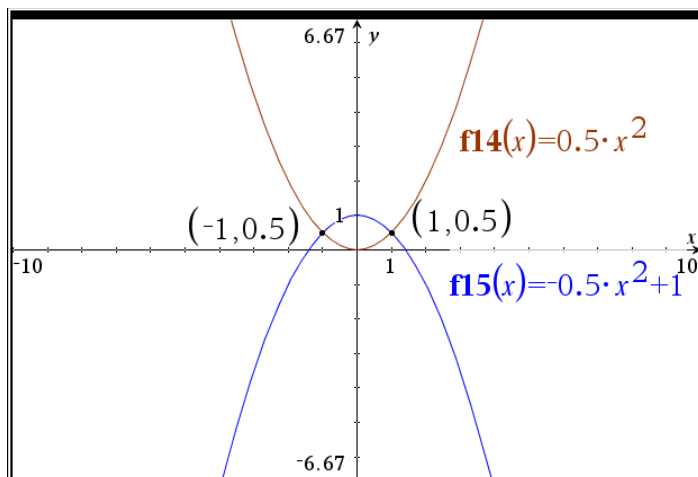


c.2 Zwei Parabeln haben genau einen Schnittpunkt, z.B. wenn die zweite aus der ersten durch eine geeignete Verschiebung hervorgegangen ist



Oder wenn man einen Berührungspunkt konstruiert, z.B. durch eine Parabel und deren Spiegelung an der Gerade $y = y_s$ (Beispiel: $f(x) = x^2 + 2$ und $f(x) = -x^2 + 2$).

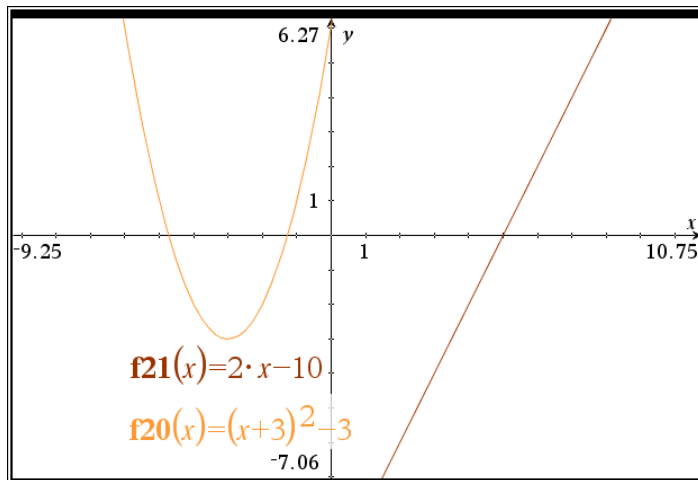
c.3 Zwei Parabeln haben zwei Schnittpunkte



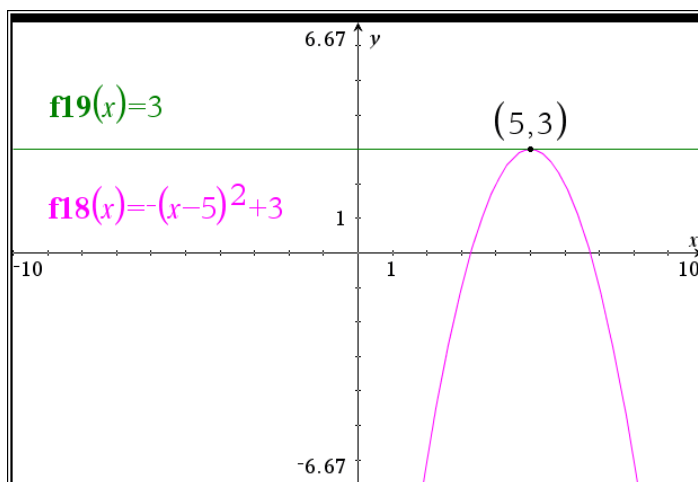
c.4 Zwei Parabeln haben drei Schnittpunkte

Es ist nicht möglich, dass zwei Parabeln genau drei Schnittpunkte miteinander erzeugen können. Sie können keinen, einen, zwei oder unendlich viele Schnittpunkte miteinander besitzen. Letzteres trifft ein, sofern beide Funktionen identisch sind.

d) d.1 Parabel und Gerade besitzen keinen Schnittpunkt

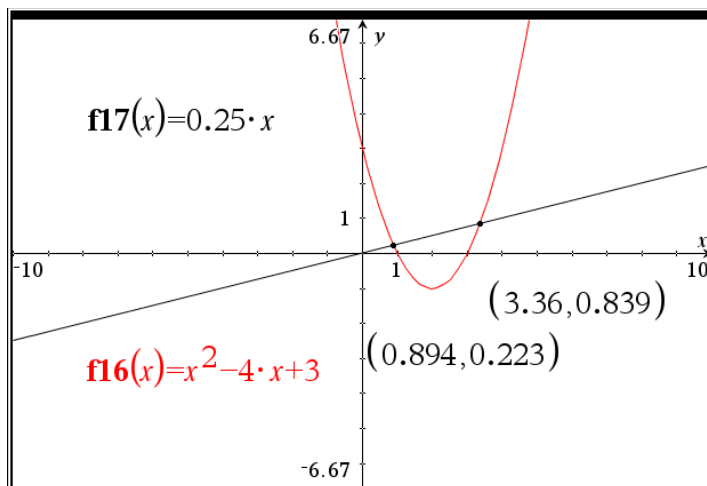


d.2 Parabel und Gerade besitzen einen Schnittpunkt.

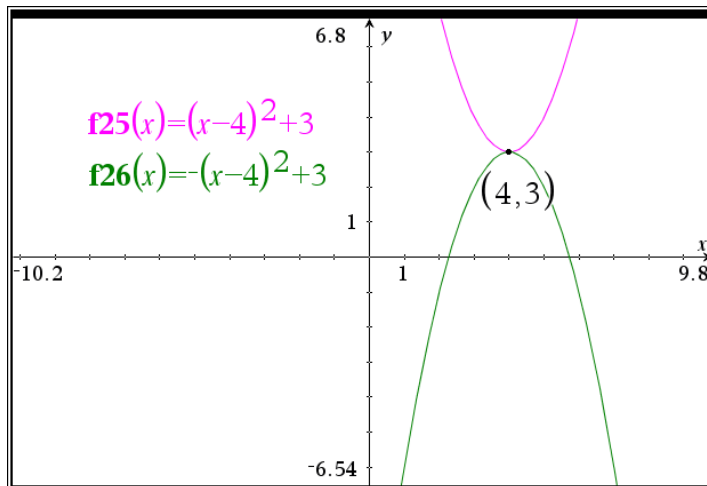


Die Tangente muss nicht horizontal verlaufen. Man kann auch an andere Punkte als den Scheitelpunkt eine Tangente legen (aber so ist es am einfachsten).

d.3 Parabel und Gerade besitzen zwei Schnittpunkte



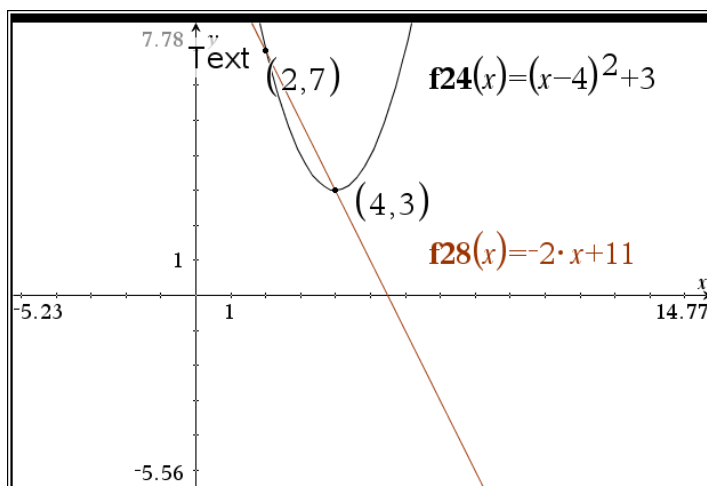
e) e.1 Zwei Parabeln mit einem Schnittpunkt A(4|3)



(einfachster Fall: Scheitelpunkt ist Schnittpunkt, andere Punkte möglich)

e.2 Gerade und Parabel mit den Schnittpunkten A(4|3) und B(2|7)

Weg: Suche eine Parabel, die durch die beiden Punkte geht (nehmen wir einen Punkt als Scheitelpunkt) und stellen noch eine Gerade durch die beiden Punkte auf.



$$\begin{aligned} a \cdot 2 + b &= 7 \\ a \cdot 4 + b &= 3 \\ \hline 2a &= -4 \\ a &= -2 \\ -2 \cdot 2 + b &= 7 \\ b &= 11 \end{aligned}$$

➤ Aufgabe 6: Quadratische Gleichungen

- a) (1) (1) $x^2 - 5 = 0$. (zwei Lösungen, da nach unten verschobene Normalparabel)
 $\Leftrightarrow x^2 = 5$
 $\Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$
 Somit erhalten wir die oben genannten Lösungen.
- (2) $x^2 + 5 = 0$ (zwei Lösungen, da nach unten verschobene Normalparabel)
 $\Leftrightarrow x^2 = -5$ | $\sqrt{\quad}$
 $\Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-5}$ (keine Lösung, da Diskriminante negativ)
- (1) $x^2 - 4x = 0$ (Zwei Lösungen eine ist $x_1 = 0$)
 $\Leftrightarrow x(x - 4) = 0$
 Somit erhalten wir als Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 - 4 = 0$, also $x_2 = 4$.
- (2) $-x^2 - 4x = 0$. (wie in (3), da nur an x-Achse gespiegelt.)
 $\Leftrightarrow -x(x - 4) = 0$
 $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.
- (3) $x^2 + 4x - 5 = 0$. (zwei Lösungen, da nach oben geöffnet und negativer y-Achsenabschnitt)
 $\Leftrightarrow (x - 1)(x + 5) = 0$
 $\Leftrightarrow x_1 = -5$ und $x_2 = 1$
- (4) $x^2 - 4x - 5 = 0$. (wie (5))
 $\Leftrightarrow (x + 1)(x - 5) = 0$
 $\Leftrightarrow x_1 = 5$ und $x_2 = -1$
- (5) $-x^2 - 4x - 5 = 0$
 $\Leftrightarrow -(x^2 + 4x + 5) = 0 \Leftrightarrow -(x + 2)^2 + 1 = 0$
 Keine Lösung, da Parabel komplett oberhalb der x-Achse verläuft.
 (Oder rechnerische Lösung)
- (6) $-x^2 - 4x + 5 = 0$
 $\Leftrightarrow -(x^2 + 4x - 5) = 0$. (wie in (5), diesmal nach unten geöffnet und positiver y-Achsenabschnitt. Der genauere Vergleich zeigt, dass es sogar dieselben Lösungen sind: $x_1 = -5$ und $x_2 = 1$)
- b) (1) Quadratische Ergänzung, da die Form schon passt:
 $(x - 3)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 3 = -2$ oder $x - 3 = 2 \Leftrightarrow x = 1$ oder $x = 5$
- (2) Vorstellen: man sieht dass es keine Lösung hat, da der Graph oberhalb der x-Achse verläuft, denn $S(3|4)$ und nach oben geöffnet.
- (3) Satz vom Nullprodukt nutzen:
 $3x(x + 4) = 0 \Leftrightarrow 3x = 0$ oder $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -4$
- (4) Faktorisieren, dann den Satz vom Nullprodukt nutzen:
 $x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -8$
- (5) p - q-Formel:
 $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 3} = 2 \pm 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 3$$

(6) Nutze wieder die Produktform und den Satz vom Nullprodukt:

$$x - 1 = 0 \text{ oder } x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 3.$$

c)

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1 &= 0 \quad | + \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4} \\ \Leftrightarrow x + \frac{3}{2} &= \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \quad | - \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \frac{p^2}{4} - q \\ \Leftrightarrow x + \frac{p}{2} &= \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

d) Wenn man die quadratische Ergänzung mit einer allgemeinen Gleichung durchführt, erhält man die pq-Formel.

e)

I. $x^2 + 4x + q = 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x &= -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{4^2}{4} - q} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{4}{2} \pm \sqrt{4 - q} \end{aligned}$$

Keine Lösung:

Wir erhalten keine Lösung, sofern $q > 4$

Eine Lösung:

Wir erhalten eine einzige Lösung, wenn wir unter der Wurzel eine 0 erzeugen, sodass dies der Fall ist, wenn $q = 4$. Lösung ist $x = -2$.

Zwei Lösungen:

Wir erhalten zwei Lösungen, wenn $q < 4$. Lösungen: $x = -2 \pm \sqrt{4 - q}$

II. Eine Lösung mit $x = 5$

$$x^2 + 4x + q = 0$$

Setze $x = 5$ ein:

$$25 + 20 + q = 0$$

$$45 + q = 0$$

$$q = -45$$

Damit wir für eine Lösung $x = 5$ erhalten muss $q = -45$ betragen.

Es gibt zwei Lösungen für x , denn $q < 4$. Die Aussage ist also falsch und lässt sich nicht begründen.

III. Scheitelpunkt besitzt den Funktionswert -6

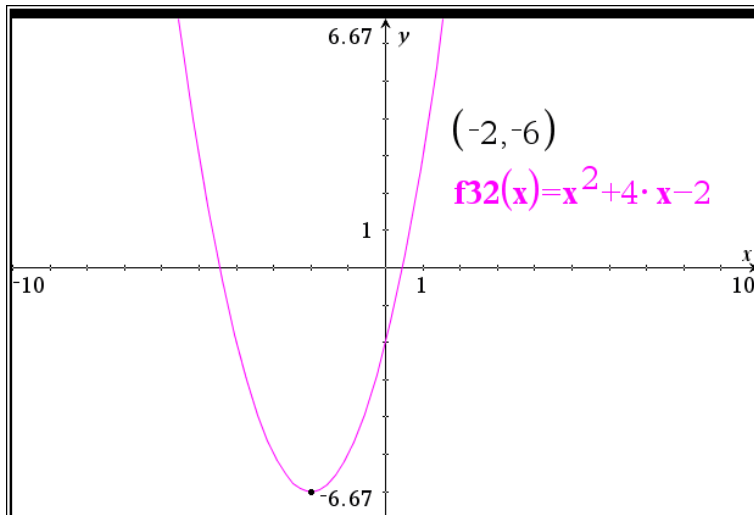
$$x^2 + 4x + q = 0$$

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + q = 0$$

$$(x + 2)^2 - 4 + q = 0$$

Somit muss $-4 + q = -6$ ergeben und dies erhalten wir für $q = -2$

Graph zur anschaulichen Überprüfung:



IV. Lösungen $x=4$ und $x=2$ sollen entstehen

Diese Lösung kann es nicht geben, da in der pq-Formel sichtbar wird, dass zu -2 ein positiver Wert addiert beziehungsweise subtrahiert werden muss. Die beiden entstehenden Ergebnisse können nicht beide positiv sein, daher kann zu $x=2$ und $x=4$ als Nullstellen kein q gefunden werden, die zu der gegebenen Gleichung passen.

Graphisch: Der Scheitelpunkt liegt mittig zwischen den Nullstellen. Also wäre er bei $x=3$ und nicht bei $x=-2$.

f) Betrachten wir zunächst die x -Koordinate:

Ein Beispiel mit $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ und } y_s = -\frac{a}{4}(x_2 - x_1)^2$$

$$x_s = \frac{5+1}{2} = 3 \text{ und } y_s = -\frac{a}{4}(5 - 1)^2 = -4a$$

Allgemein:

$$\text{Nullstellen einer quadratischen Funktion: } x_{1;2} = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

In der Mitte zwischen diesen beiden Werten liegt $x_s = \frac{-b}{2a}$.

Man kann auch rechnerisch in die folgende Formel einsetzen und dies verifizieren:

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} + \frac{-b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

$x_s = \frac{-b}{2a}$ ist gerade der x -Wert des Scheitelpunktes.

Geometrisch: Durch den Scheitelpunkt verläuft die Symmetrieachse der Parabel, sodass die Mitte der Nullstellen dieselbe x -Koordinate besitzt, wie der Scheitelpunkt.

Betrachten wir die y -Koordinate: Diese hängt von der x -Koordinate ab, die wir in die allgemeine Funktionsgleichung einsetzen können. Da wir die y -Koordinate in Abhängigkeit von x_1 und x_2 beschreiben wollen, nutzen wir eine Gleichung, in der diese beiden Werte vorkommen, also die faktorisierte Form $f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$, denn in dieser Form sind Vereinfachungen möglich, da dieselben Parameter vorkommen.

Setze ein:

$$y_s f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = a \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_2\right) = a \cdot \left(\frac{-x_1 + x_2}{2}\right) \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow y_s f = \frac{a}{4} \cdot (-x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \frac{-a}{4} \cdot (x_1 - x_2)(x_1 - x_2) = \frac{-a}{4} \cdot (x_1 - x_2)^2$$

(Sie können auch $\frac{-a}{4} \cdot (x_2 - x_1)^2$ erhalten. Das ist dasselbe, wie Sie sich durch Ausmultiplizieren (oder durch Interpretation: es wird quadriert!) klar machen können.)

Während wir den x-Wert des Scheitelpunkts in Abhängigkeit von x_1 und x_2 eindeutig berechnen können, gibt es jedoch unendlich viele Parabeln, die Achsenschnittpunkte x_1 und x_2 besitzen, denn die Parabel kann unterschiedlich stark und nach oben oder nach unten geöffnet sein. Daher hängt die y-Koordinate von a ab, wie die obige Formel beschreibt.

➤ Aufgabe 7: Mit quadratischen Termen umgehen

a)

$$(1) (2a + ab)^2 = 4a^2 + 4a^2b + a^2b^2$$

$$(2) c^2 - 4cx + 4x^2 = (c - 2x)^2$$

$$(3) 9a^2 - 6ax + x^2 = (3a - x)^2$$

$$(4) \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$$

$$(5) 4c^2 - 25 = (2c - 5)(2c + 5)$$

$$(6) 16a^2 - 4ab + \frac{1}{4}b^2 = \left(4a - \frac{1}{2}b\right)^2$$

b)

$$(1) (a + b)^4 = (a + b)^2(a + b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 2a^3b + 4a^2b^2 + 2ab^3 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4$$

$$(2) 9a^2 - 16 = (3b - 4)(3b + 4)$$

c)

$$* 0.7^2 + 0.3 = 0.7 + 0.3^2$$

$$\Leftrightarrow 0.49 + 0.3 = 0.7 + 0.09$$

$$\Leftrightarrow 0.79 = 0.79$$

$$* 0.4^2 + 0.6 = 0.4 + 0.6^2$$

$$\Leftrightarrow 0.16 + 0.6 = 0.4 + 0.36$$

$$\Leftrightarrow 0.76 = 0.76$$

$$* (1 - a)^2 + a = 1 - 2a + a^2 + a = 1 - a + a^2 \text{ (was zu zeigen war)}$$

d) Die erste binomische Formel besagt, dass

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{Also } (a + b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab$$

$$\text{Also } \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} = ab$$

Mit der zweiten binomischen Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ lässt sich folgern

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{2} = \frac{a^2 + b^2 - (a-b)^2}{2}$$

Das kommt Ihnen bestimmt kompliziert vor. Vielleicht haben Sie die Gleichungen auch in anderer Reihenfolge aufgeschrieben (rückwärts gedacht). Das Tolle ist: es bleiben also nur Quadrate!

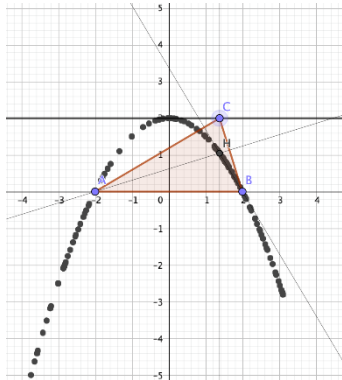
Beispiel $13 \cdot 12$

$$13 \cdot 12 = \frac{(13+12)^2 - 13^2 - 12^2}{2} = \frac{25^2 - 13^2 - 12^2}{2} = \frac{625 - 169 - 144}{2} = \frac{312}{2} = 156$$

(man muss die Quadratzahlen also ziemlich gut kennen, damit sich der Aufwand lohnt)

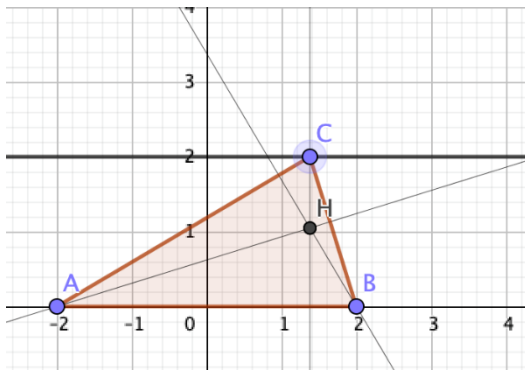
➤ Aufgabe 8: Ortslinien funktional beschreiben

a) Man sieht es im Applet sofort, dass die Punkte auf einer Parabel liegen.



Wie kann man es begründen?

Damit das möglichst einfach geht, wurde im Applet eine günstige Lage der Punkte im Koordinatensystem gewählt. Blenden wir die Spur wieder aus, dann sieht man die relevanten Beziehungen deutlicher.



Der Höhenschnittpunkt H liegt auf allen Höhen also z.B. auf der Höhe durch A. Die ist senkrecht zu BC.

Für die Steigung von BC gilt: $a_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2-0}{t-2} = \frac{2}{t-2}$. Also gilt für die Steigung von

h_a : $a_{h_a} = \frac{2-t}{2}$ (denn das ist der negative Kehrwert der Steigung von BC).

Stelle eine Geradengleichung für h_a auf:

$$h_a(x) = \frac{2-t}{2} \cdot x + b$$

Setze Punkt A ein:

$$0 = \frac{2-t}{2} \cdot (-2) + b \Leftrightarrow -(2-t) + b = 0 \Leftrightarrow b = 2-t$$

$$h_a(x) = \frac{2-t}{2} \cdot x + 2-t$$

Der Höhenschnittpunkt liegt an der Stelle t (so ist t gerade gewählt, denn t ist die x-Koordinate von C und die stimmt bei dieser Lage des Dreiecks mit der x-Koordinate von H überein).

Mit dieser Gleichung kann man also die Koordinaten des Funktionswertes von H bestimmen:

$$h_a(t) = \frac{2-t}{2} \cdot t + 2-t = \frac{-t^2+2t}{2} + 2-t = \frac{-t^2}{2} + 2$$

Die Punkte liegen also auf einer Parabel.

b) Allgemein gilt für $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist der Scheitelpunkt

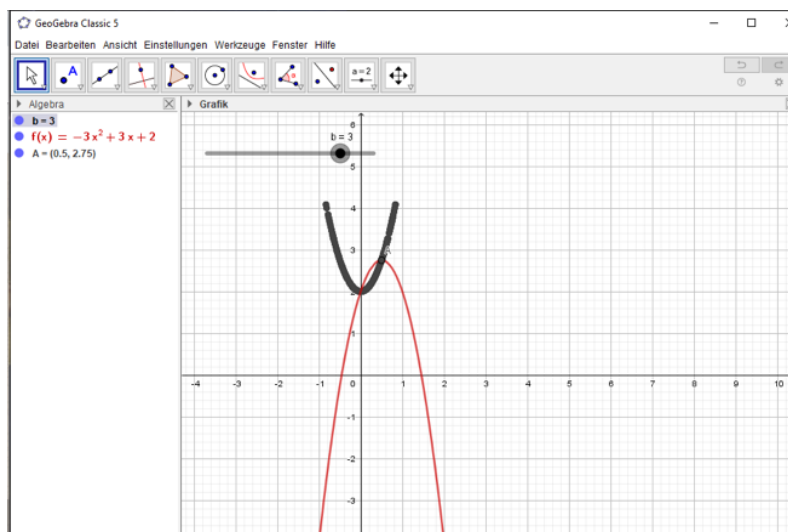
$S\left(-\frac{b}{2a} \mid \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ oder $S\left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right)$. Das wird durch die weiteren Fragen an Beispielen vertieft.

-Scheitelpunkt von $f(x) = -3x^2 + bx + 2 = -3\left(x^2 - \frac{b}{3}x\right) + 2 = -3\left(x - \frac{b}{6}\right)^2 + \frac{b^2}{12} + 2$

ist $S\left(-\frac{b}{6} \mid 2 + \frac{b^2}{12}\right)$ (sieht man auch mit der allgemeinen Formel)

Graph der Ortskurve:

Für $b=0$ liegt der Scheitelpunkt bei $S(0 \mid 2)$, für $b \neq 0$ liegen die Punkte offensichtlich weiter oben. Es scheint eine nach oben geöffnete Parabel zu sein. Die Vermutung kann mit Schieberegler bestätigt werden kann.

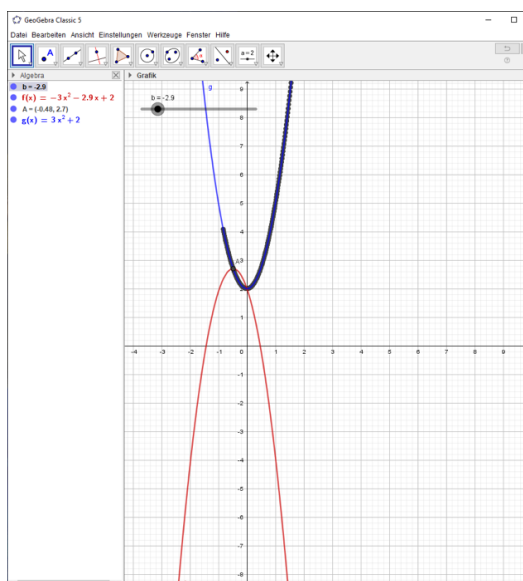


Berechnung der Gleichung der „Ortskurve“: Sie haben hier vielleicht durch die gefundenen Punkte ein lineares Gleichungssystem aufgestellt und eine Gleichung bestimmt. Hier kommt direkt der angeregte Weg:

Deute $S\left(-\frac{b}{6} \mid 2 + \frac{b^2}{12}\right)$ als Gleichungssystem: I. $x = -\frac{b}{6}$; II. $y = 2 + \frac{b^2}{12}$

Löse I nach b auf und setze in II. ein: $b = -6x$ In II: $y = 2 + \frac{(-6x)^2}{12} = 2 + 3x^2$

Die Scheitelpunkte liegen auf dem Graphen zu $g(x) = 2 + 3x^2$.



c) Da t nur nach oben verschiebt, liegen alle Punkte auf der Gerade $x = x_s$. Rechnerisch:

$$f(x) = -3x^2 + 9x + 12t = -3(x^2 - 3x) + 12t = -3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{27}{4} + 12t$$

Scheitelpunkt ist $S\left(\frac{3}{2} \mid -\frac{27}{4} + 12t\right)$. Ortskurve: $x = \frac{3}{2}$

d) $f(x) = x^2$

Tangenten kann man graphisch – z.B. auch durch Anpassen von Geraden mit dem Schieberegler oder durch Berechnung bestimmen. Wenn Sie sich Ihre Ergebnisse plotten lassen können Sie diese gut überprüfen. Ansonsten helfen die folgenden Lösungsbeispiele mit der Struktur:

- Setze die Funktionsterme der Parabel und die allgemeine Form der Geraden gleich.
- Setze die Diskriminante = 0, da eine Tangente nur einen Schnittpunkt hat.
- Nutze die weiteren Bedingungen, z.B. gegebene Punkte oder Steigungen.

I. Nutze $P(4|16)$

$$t(x) = ax + b$$

Für Schnittpunkte gilt die Bedingung $f(x) = t(x) \Leftrightarrow x^2 = ax + b$

$$\Leftrightarrow x^2 - ax - b = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

Wenn $t(x)$ eine Tangente ist, dann gibt es nicht zwei Schnittpunkte, sondern einen. Die Diskriminante (das unter der Wurzel) muss also 0 sein.

$$\frac{a^2}{4} + b = 0 \Leftrightarrow a^2 + 4b = 0. \quad (\text{I.})$$

Setze zudem Punkt P ein: $16 = 4a + b$

$$\Leftrightarrow 16 - 4a = b. \quad (\text{II.})$$

Einsetzen von b in I. $0 = a^2 + 4(16 - 4a) = a^2 + 64 - 16a = (a - 8)^2$

$$\Rightarrow a = 8$$

$$t(x) = 8x + b$$

$$\Rightarrow 16 = 8 \cdot 4 + b$$

$$\Rightarrow -16 = b$$

$$\Rightarrow t(x) = 8x - 16$$

II. Berührt in $P(1|0)$

Und Diskriminante (wie oben) $D = a^2 + 4b = 0$

Nutze Koordinaten des Punktes $P(1|0)$: $0 = a + b$

$$\Leftrightarrow -a = b$$

$$0 = a^2 - 4a$$

$$\Leftrightarrow 0 = a(a - 4)$$

also $a = 0$ oder $a = 4$

Für $a = 0$ ergibt sich $t(x) = 0$ ist Tangente (die im Ursprung berührt).

Für $a = 4$ ergibt sich $t(x) = 4x - 4$ ist Tangente (die im Punkt $P(1|0)$ berührt).

III. Nutze $a=2$

Die Tangente hat die Gleichung: $t(x) = 2x + b$

Schnittpunkt $x^2 = 2x + b \Leftrightarrow x^2 - 2x - b = 0$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + b}$$

Nur eine Lösung, wenn Diskriminante 0: $1 + b = 0$

$$b = -1$$

$t(x) = 2x - 1$ ist die Tangente mit der Steigung 2, die die Normalparabel brührt.

IV. Nutze $P(x_0/x_0^2)$ als beliebigen Punkt, der auf der Normalparabel liegt.

Tangente: $t(x) = ax + b$

$$x^2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - ax - b = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

Nur eine Lösung, wenn Diskriminante 0: $\frac{a^2}{4} + b = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{a^2}{4}$

$$t(x) = ax - \frac{a^2}{4}$$

$$t(x_0) = ax_0 - \frac{a^2}{4} = x_0^2$$

$$4ax_0 - a^2 = 4x_0^2$$

$$a^2 - 4ax_0 - 4x_0^2 = 0$$

$$(a - 2x_0)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2x_0$$

Es ergibt sich die Tangente $t(x) = 2x_0 \cdot x - x_0^2$

Für $g(x)$: ergeben sich alle Aufgabenteile analog:

$$g(x) = (x - 3)^2 + 3$$

Gleichsetzen, Diskriminante gleich 0 setzen und Parameter bestimmen.

$$t(x) = ax + b$$

$$g(x) = t(x)$$

$$\rightarrow x^2 - 6x + 12 = ax + b$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - ax + 12 - b = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (6 + a)x + 12 - b = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 + a}{2} \pm \sqrt{\frac{(6 + a)^2}{4} - 12 + b}$$

$$D = \frac{(6 + a)^2}{4} - 12 + b = 0 \mid \cdot 4$$

$$a^2 + 12a + 4b + 36 - 48 = 0 \quad *)$$

I. Nutze $P(4|4)$, da $g(4) = 4$

$$4 = 4a + b$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4a = b$$

$$*) 0 = a^2 + 12a + 4(4 - 4a) - 12 = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$$

$$a = 2$$

$$t(x) = 2x + b$$

$$4 - 4a = b$$

$$\Rightarrow -4 = b$$

$$\Rightarrow t(x) = 2x - 4$$

II. Nutze $P(1|0)$ und setze in $t(x)$ ein.

$$0 = a + b$$

$$\rightarrow -a = b$$

$$x^2 - 6x + 12 = ax - a \Leftrightarrow x^2 - (6 + a)x + 12 + a = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 + a}{2} \pm \sqrt{\frac{(6 + a)^2}{4} - 12 - a}$$

Diskriminante muss 0 sein: $\frac{(6+a)^2}{4} - 12 - a = 0$

$$a^2 + 12a + 4(-a) + 36 - 48 = 0$$

$$a^2 + 8a - 12 = 0$$

Nutze p - q - Formel und erhalte folgende Ergebnisse:

$$a = -4 + \sqrt{28} \text{ oder } a = 4 + \sqrt{28}, b = -a$$

$$t_1(x) = (-4 + \sqrt{28})x + 4 - \sqrt{28}$$

$$t_2(x) = (-4 - \sqrt{28})x + 4 + \sqrt{28}$$

III. Nutze a=2

$$t(x) = 2x + b$$

$$\text{Einsetzen in Diskriminante: } 0 = 4 + 24 + 4b - 12$$

$$\Rightarrow -4 = b$$

$$\Rightarrow t(x) = 2x - 4$$

IV. Nutze $P(x_0/x_0^2 - 6x_0 + 12)$

$$x_0^2 - 6x_0 + 12 = mx_0 + b$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - mx_0 - 6x_0 + 12 = b$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - (6 + m)x_0 + 12 = b$$

$$0 = m^2 + 12m + 4(x_0^2 - (6 + m)x_0 + 12) - 12$$

Nutze p - q - Formel und erhalte

$$m = 2x_0 - 6$$

$$\Rightarrow t(x) = (2x_0 - 6) \cdot x - x_0^2 + 12$$

➤ Aufgabe 9: Extreme Werte gesucht

- a) Wir stellen zu Beginn zu den angegebenen Informationen unsere Bedingungen auf. Zum einen soll die Fläche der Weide $A = x \cdot y$ maximal groß sein. Zum anderen haben wir eine Beschränkung für die zur Verfügung stehende Schnurlänge mit $U=100\text{m}$ und dass eine Wand als Begrenzung genutzt wird. Wir können somit die Formel für die „Umzäunung“ aufstellen mit: $U = 2 \cdot y + x$.

Wir rechnen wie folgt:

- Wir stellen unsere zweite Bedingung von $100 = 2 \cdot y + x$ nach x um.

$$\Leftrightarrow x = 100 - 2 \cdot y$$

- Wir setzen unser x in unsere zweite Bedingung in unsere Zielfunktion ein:

$$A(y) = (100 - 2 \cdot y) \cdot y$$

$$\Leftrightarrow A(y) = 100 \cdot y - 2 \cdot y^2$$

- Nun versuchen wir das Maximum zu bestimmen, also den Scheitelpunkt dieser nach unten geöffneten Parabel.

$$4. \quad A(y) = 100 \cdot y - 2 \cdot y^2 = -2(y^2 - 50y) = -2(y - 25)^2 + 1250$$

- Wir erhalten eine Seitenlänge welche 25m beträgt. Um die zweite Seitenlänge herauszufinden, setzen wir das Ergebnis aus 4. in unsere zweite Bedingung. Dies führt uns zur zweiten Seitenlänge:

$$100 = 2 \cdot y + x \mid \text{für } y = 25$$

$$\Leftrightarrow 100 = 2 \cdot 25 + x$$

$$\Leftrightarrow 50 = x$$

- Die „Umzäunung“ muss, sofern die Weide maximal groß sein soll, so gewählt werden, dass zwei der drei Seiten 25m lang sind und die dritte gegenüber der Wand 50m lang.

- b) Wir stellen zu Beginn zu den angegebenen Informationen unsere Bedingungen auf. Wieder soll die Weide maximal groß sein, sodass $A = (x) = x \cdot y$ gilt. Zum anderen haben wir eine Beschränkung für die zur Verfügung stehende Schnurlänge mit $U=100\text{m}$ und dass zwei orthogonale Wände als Begrenzung genutzt werden. Wir können somit die Formel für die „Umzäunung“ aufstellen mit: $U = y + x$.

Wir rechnen wie folgt:

1. Wir stellen unsere zweite Bedingung von $100 = y + x$ nach x um.

$$x = 100 - y$$

2. Wir setzen unser x in unsere zweite Bedingung in unsere Zielfunktion ein:

$$A = (100 - y) \cdot y$$

$$\Leftrightarrow A(y) = 100 \cdot y - y^2.$$

3. Nun versuchen wir das Maximum zu bestimmen.

$$A(y) = 100 \cdot y - y^2 = -y^2 + 100 \cdot y + 50^2 - 50^2 = -(y^2 - 100y - 50^2 + 50^2) = -(y - 50)^2 + 50^2 = -(y - 50)^2 + 50^2. \quad \text{SP}(50/50^2)$$

Wir erhalten eine Seitenlänge welche 50m beträgt. Die zweite Länge ist ebenfalls 50 ($100 = 50 + x$)

4. Die „Umzäunung“ muss, sofern die Weide maximal groß sein soll, so gewählt werden, dass beide Seiten 50m lang sind.

- c) Wir stellen zu Beginn durch die angegebenen Informationen unsere Bedingungen auf. Zum einen soll die Weide maximal groß sein, sodass $A = \frac{x \cdot y}{2}$ gilt. Zum anderen haben wir eine Beschränkung für die zur Verfügung stehende Schnurlänge mit $U=100\text{m}$ und dass zwei orthogonale Wände als Begrenzung genutzt werden. Wir können somit die Formel für die „Umzäunung“ aufstellen mit: $U = x$.

Wir rechnen wie folgt:

1. Unsere Nebenbedingung lautet:

$$x^2 + y^2 = 100^2$$

2. Die Zielfunktion besteht weiterhin mit:

$$A = \frac{x \cdot y}{2}$$

3. Wir lösen unsere Nebenbedingung nach x auf und erhalten:

$$x^2 + y^2 = 100^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 100^2 - y^2$$

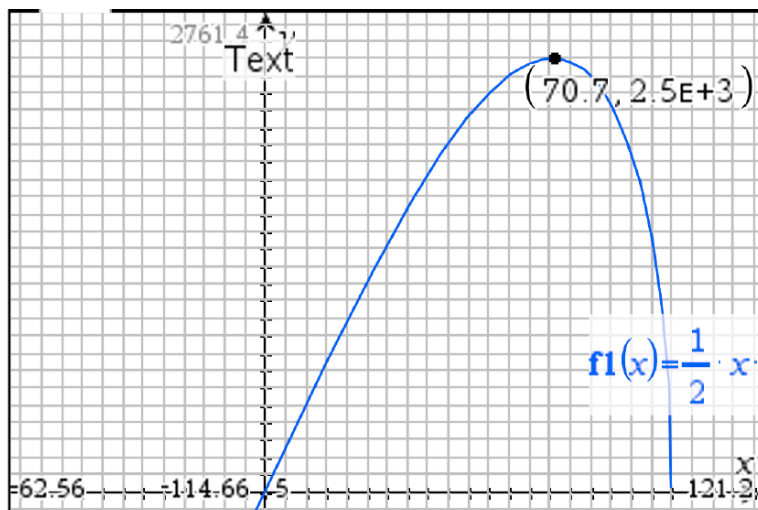
$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{100^2 - y^2}$$

$$\rightarrow x = \pm \sqrt{10000 - y^2} \text{ (nur positive Lösung relevant)}$$

4. x können wir nun in unsere Zielfunktion aus 2. einsetzen:

$$A = \frac{\sqrt{10000 - y^2} \cdot y}{2}$$

5. In diesem Fall können wir das Maximum nicht durch quadratische Ergänzung bestimmen, aber z.B. graphisch annähern:



Mit einer Seitenlänge von ca. 70,7 m wird das Dreieck am größten.

Alternativ: Wenn das größte Rechteck das Quadrat ist, dann könnte das größte rechtwinklige Dreieck das halbe Quadrat, also das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck sein. Der Graph oben bestätigt dies. Die Seitenlänge erhält man mit $a^2 + a^2 = 10000$ (Satz des Pythagoras).