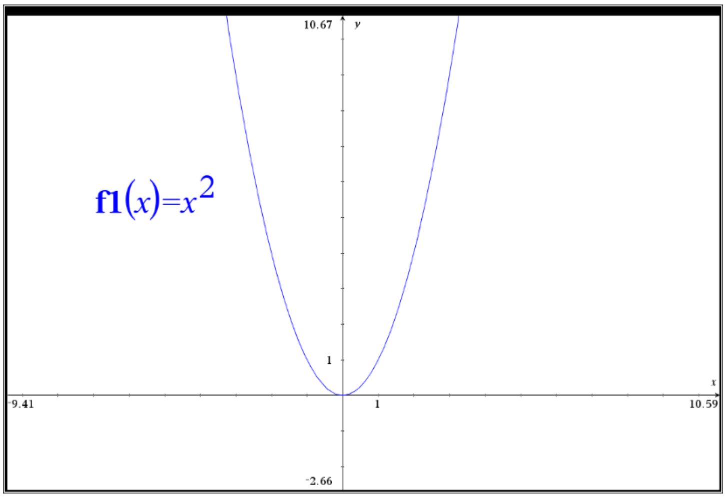
Quadratische Funktionen und ihre Gleichungen

Check-in

➢ Aufgabe 1

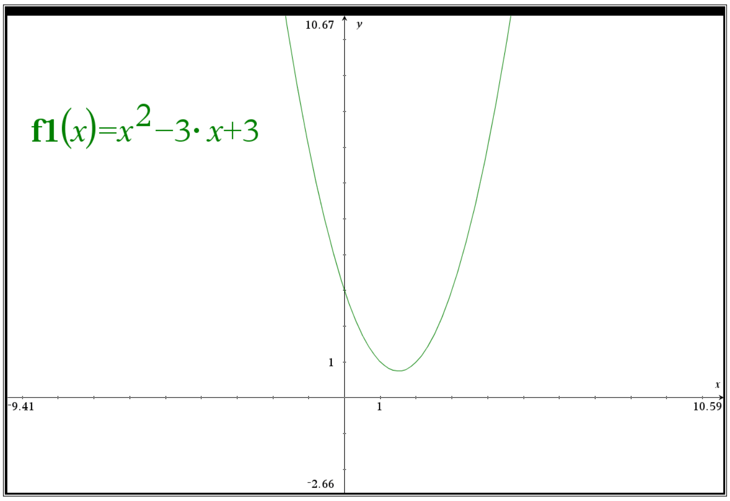
Hier ist Ihre Antwort spannend. Toll, wenn Sie das aufgeschrieben haben und mit den Definitionen und Erklärungen des Kapitels vergleichen. Vielleicht haben Sie so etwas geschrieben: Quadratische Funktionen besitzen z.B. die Form $f(x) = x^2$ (Normalparabel). Hier wird die Variable quadriert. Ihr Scheitelpunkt liegt bei $S(0|0)$.



Weiterhin ist es möglich, dass die Normalparabel so variiert wird, dass durch Transformationen weitere quadratische Funktionen entstehen. Es ist somit möglich die Normalparabel nach rechts oder links sowie nach oben oder unten zu verschieben. Solange die höchste Potenz 2 bleibt, wird weiterhin von einer quadratischen Funktion gesprochen. Die allgemeine Form einer quadratischen Funktion lautet somit:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Dies ist jedoch nicht die einzige Form, mit welcher quadratische Funktionen dargestellt werden können. So gibt es beispielsweise noch die Scheitelpunktsform oder Produktform.



Aufgabe 2

Hier ist Ihre Antwort sicher wieder spannender! Vergleichen Sie sie doch mit dieser: Wird eine positive Zahl quadriert, so wächst das Quadrat stärker als die Basis (das kann man sogar rechnerisch sehen von x nach x+1 kommt 1 dazu. Von x^2 nach $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$kommt immer $2x + 1$ und damit immer mehr je größer das positive x ist). Der Graph der Normalparabel ist kontinuierlich ($D = \mathbb{R}$), so dass sich nicht nur Punkte, sondern eine gebogene Linie ergibt, wie man im Graphen schön sehen kann.

Aufgabe 3

(1) $S\,(-3|-4)$

Verschiedene Wege: Zeichnen und Ablesen oder eine Tabelle erstellen. Den Scheitelpunkt kann man aufgrund der vorhandenen Scheitelpunktform ablesen. Die Scheitelpunktsform einer quadratischen Funktion lautet: $f(x) = a \cdot (x+d)^2 + e$ mit $S(-d|e)$.

(2) $S\,(2|-4)$

Die Funktion wird in die Scheitelpunktform gebracht

$2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 4 \quad |\text{ Assoziativgesetz}$

$\Leftrightarrow 2 \cdot (x^2 - 4 \cdot x) + 4 \,|quadratische\ Ergänzung$

$\Leftrightarrow\ 2 \cdot \left(x^2 - 4 \cdot x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) + 4$

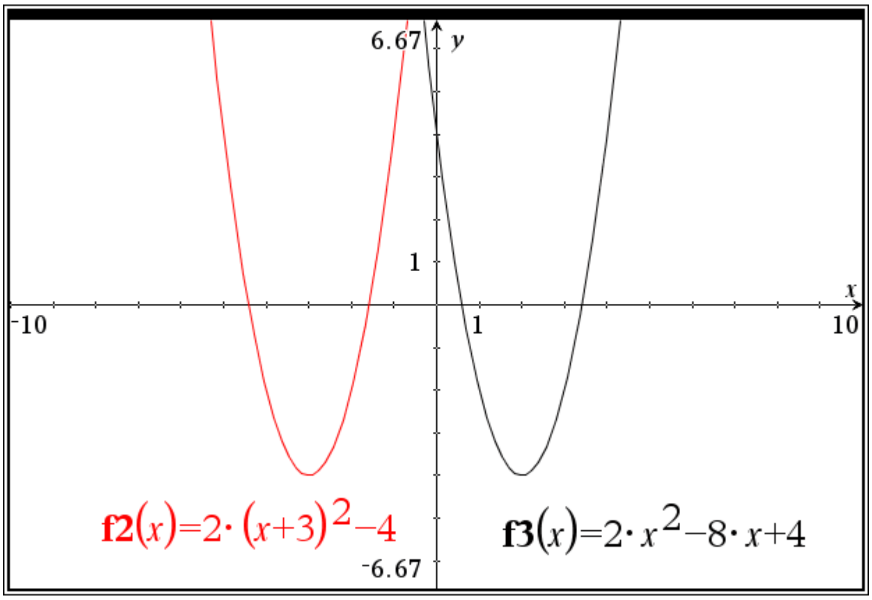
$\Leftrightarrow\ 2 \cdot (x^2 - 4 \cdot x + 2^2 - 2^2) + 4|\ 2.binom.Formel$

$\Leftrightarrow 2 \cdot (x-2)^2 - 2 \cdot 2^2 + 4$

$\Leftrightarrow 2 \cdot (x-2)^2 - 8 + 4$

$\Leftrightarrow 2 \cdot (x-2)^2 - 4$

Nun ist der Scheitelpunkt ablesbar, wie oben in der Lösung angegeben.



➢ Aufgabe 4

Welche Darstellung der Funktion gesucht ist, steht in der Aufgabe gar nicht. Sie haben bestimmt eine Gleichung gesucht. Hier sind viele Wege möglich, z.B. mit Schiebereglern, durch Ausprobieren. Systematisch nutzt man die allgemeine Form der Scheitelpunktsform $f(x) = a \cdot (x + d)^2 + e$ und setzt zunächst den Scheitelpunkt und dann den weiteren Punkt $A\ (2|5)$ ein.

Setze S in die Formel ein d=1 und e=2 $f(x) = a \cdot (x - 1)^2 + 2$

Setze nun die Koordinaten von A ein, um a zu ermitteln

$5 = a \cdot (2 - 1)^2 + 2$

$\Leftrightarrow 5 = a \cdot 1 + 2$

$\Leftrightarrow 3 = a$

Somit erhalten wir die quadratische Funktion:

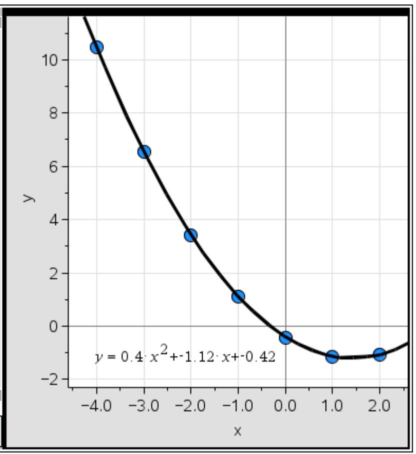
$$f(x) = 3 \cdot (x - 1)^2 + 2$$

➢ Aufgabe 5

Die Wertetabelle könnte zu einer quadratischen Funktion gehören. Aber es sind natürlich nur einige Punkte, die wir kennen. ☺

	A x	B y
=		
1	-4	10.46
2	-3	6.54
3	-2	3.42
4	-1	1.1
5	0	-0.42
6	1	-1.14
7	2	-1.06
8		
9		

B y



Ihnen ist bestimmt aufgefallen, dass der Graph immer langsamer fällt, dann aber zwischen 1 und 2 den kleinsten Funktionswert erreicht hat. Das wäre eine grobe Aussage, die uns zu der Einschätzung verleitet „Könnte passen!“.
Aber es geht anders und genauer. Sie könnten eine passende Funktion suchen (Bild oben) oder Sie schauen sich die Differenz der Funktionswerte an. Diese verändert sich linear, was ein Kennzeichen einer quadratischen Funktion ist (das schauen wir uns noch genauer im Kapitel an, an der Tabelle unten sehen Sie es aber schon).

	A	B	C	D
1	-4	10.46		
2	-3	6.54	-3.92	
3	-2	3.42	-3.12	0.8
4	-1	1.1	-2.32	0.8
5	0	-0.42	-1.52	0.8
6	1	-1.14	-0.72	0.8
7	2	-1.06	0.08	0.8

Differenz der Funktionswerte z.B. B7-B6

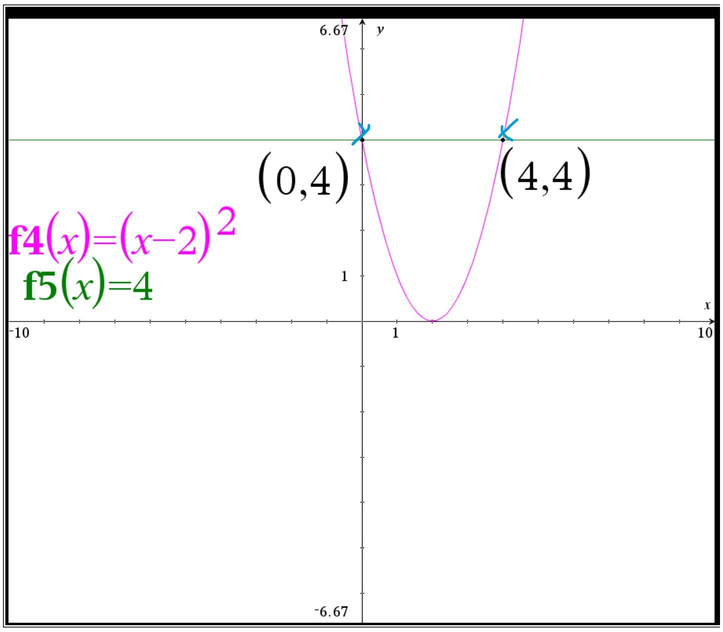
Differenz der Differenzen z.B. C7-C6

➢ Aufgabe 6

Die Parabel schneidet die x-Achse an zwei Punkten, $P\ (1|0)\ und\ Q\ (7|0)$. Wir können als erstes die x-Koordinate des Scheitelpunktes ermitteln, da wir um die Symmetrie der quadratischen Funktion wissen. Somit suchen wir die Mitte zwischen 1 und 7. Durch $x = \frac{Q_x+P_x}{2}$ lässt sich diese ermitteln. Für $Q_x = 7\ und\ P_x = 1$ erhalten wir $x = 4$. Es fehlt noch die y-Koordinate, auf die es hier keine Hinweise gibt, so dass man den Scheitelpunkt nur bedingt beschreiben kann
$S(4|y)$

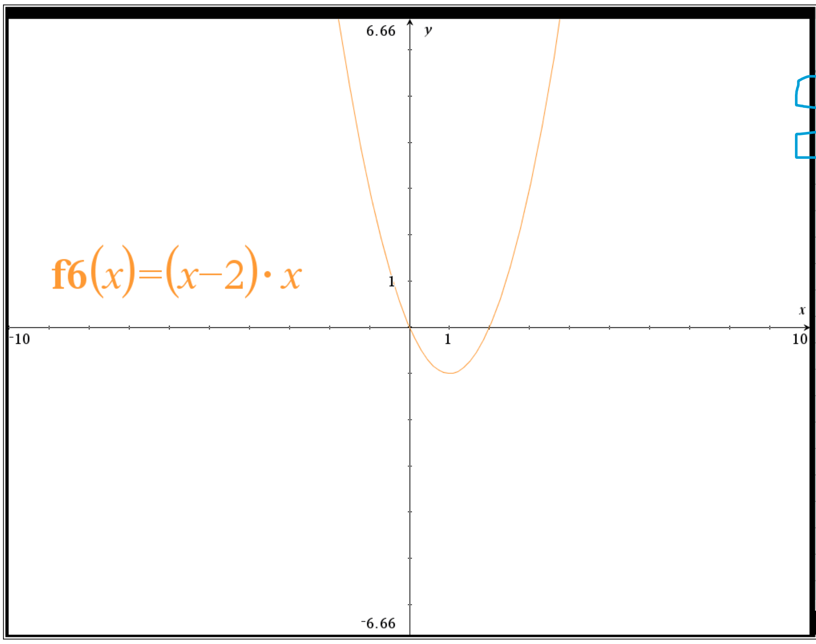
➢ Aufgabe 7

(1) $(x-2)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow x-2 = 2\ oder\ x-2 = -2 \Leftrightarrow x = 4\ oder\ x = 0$
oder $(x-2)^2 = 4$
$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 4 = 4 \mid -4$
$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x = 0 \qquad \mid$ faktorisiere x
$\Leftrightarrow x \cdot (x-4) = 0$
durch das Nullprodukt erkennen wir, dass $x = 0$ sein muss oder $x - 4 = 0$, woraus sich aus letzterem wieder $x = 4$ ergibt, sodass wir die Lösung erhalten:
L: $\{0; 4\}$



	A	B
1	-4	36
2	-3	25
3	-2	16
4	-1	9
5	0	4
6	1	1
7	2	0
8	3	1
9	4	4
10	5	9

(2) $(x-2)\cdot x = 0$
durch das Nullprodukt erkennen wir hier sofort, dass $x = 0$ oder $x - 2 = 0$ sein muss, sodass letzteres zu $x = 2$ führt und wir somit folgende Lösungen für x erhalten, welche die Nullstellen darstellen: L = {0; 2}



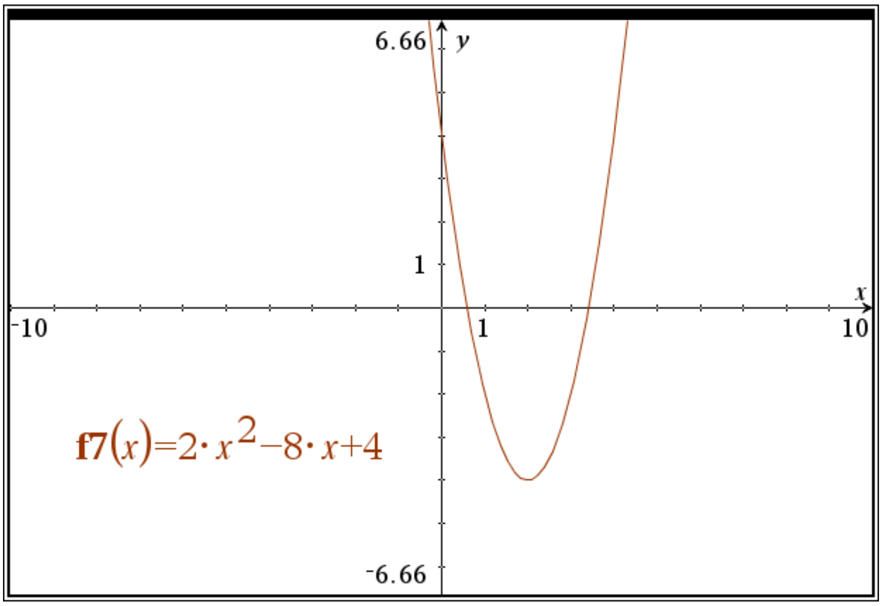
x	f6(x):= (x−2)*x
0.	0.
1.	-1.
2.	0.
3.	3.
4.	8.
5.	15.
6.	24.
7.	35.
8.	48.
9.	63.
10.	80.
11.	99.
12.	120.
13.	143.
14.	168.
15.	195.
16.	224.
17.	255.
18.	288.
19.	323.

0.

(3) $2\cdot x^2 - 8\cdot x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 4\cdot x + 2 = 0$
p − q − Formel oder durch quadratische Ergänzung lösbar:
$für\ p = -4\ und\ q = 2$
$x_1 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
dies gilt auch für eine mögliche zweite Lösung x_2

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{4}{2}\right)^2 - 2}$$
$$\Leftrightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-2}$$
$$\Leftrightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Somit erhalten wir zwei Lösungen (Nullstellen):
L:$\{N(2+\sqrt{2}|0)\ und\ M(2-\sqrt{2}|0)\}$
Über die quadratische Ergänzung
$2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 4 \cdot x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 4 \cdot x + \mathbf{4} - \mathbf{4} + 2 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 - \mathbf{4} + 2 = 0$|+2
$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 2$
$\Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{2}$ oder $x - 2 = -\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2}$ oder $x = 2 - \sqrt{2}$



Tabellarisch ist solch ein Wert schwer nur angenähert zu ermitteln.

➢ Aufgabe 8

Wir haben es in der vorigen Aufgabe gesehen: Es können mehrere Darstellungsformen angesprochen werden: Gleichungen (also algebraisch-symbolische Darstellungsformen), Graphen(graphisch), Tabellen (tabellarisch) oder auch verbale Begründungen, die sich bei quadratischen Gleichungen schon nicht mehr so anbieten. In jeder Darstellungsform gibt es verschiedene Wege, die im Kapitel thematisiert werden.