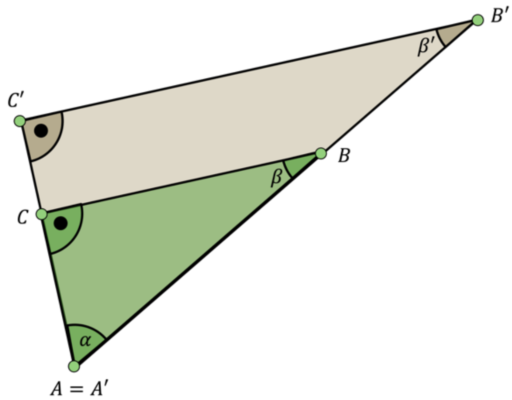
Trigonometrische Funktionen und Gleichungen

Check-out

➢ Aufgabe 1



a) Die beiden dargestellten rechtwinkligen Dreiecke sind ähnlich, da sie aus einer zentrischen Streckung mit Punkt A als Streckzentrum hervorgegangen sind. Entsprechend sind alle Seitenlängen unterschiedlich groß, aber die entsprechenden Verhältnisse einzelner Strecken zueinander bleiben gleich. Man spricht auch von der sog. Längenverhältnistreue solcher Abbildungen. Da der Sinus (wie auch Kosinus und Tangens) im Dreieck anhand von Verhältnissen entsprechender Seitenlängen definiert werden, ergeben sich die gleichen Werte für z.B. $\sin(\alpha)$ in beiden Dreiecken.

b) Hierfür müsste die Ankathete größer als die Hypotenuse eines Dreiecks sein. Dies ist jedoch definitionsgemäß nicht möglich, da die Hypotenuse die längste Seite eines rechtwinkligen Dreiecks ist.

c) Würde dies gelten, würde daraus direkt $\frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = 0{,}8$ folgen. Hieraus lässt sich unmittelbar $Gegenkathete = Ankathete = 0{,}8 \cdot Hypotenuse$ ableiten. Hiermit lässt sich nun die Summe der Quadrate aus Ankathete und Gegenkathete berechnen: $(0{,}8 \cdot Hypotenuse)^2 + (0{,}8 \cdot Hypotenuse)^2 = 0{,}64 \cdot (Hypotenuse)^2$. Diese müsste nach dem Satz des Pythagoras gleich dem Hypotenusen-Quadrat sein, was offenbar nicht der Fall ist. Die Annahmen können also nicht zugetroffen haben. Es ist somit nicht möglich, dass in einem Dreieck $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ gleichzeitig den Wert 0,8 annehmen.

➢ Aufgabe 2

a) Entsprechend der Definition des Bogenmaßes wird hier gerade nach einer Umrechnung des Gradmaß in Ersteres gefragt. Die Winkel entsprechen daher den Bogenlängen $\frac{1}{2}\pi, \pi$ sowie $\frac{1}{4}\pi$.

b) Negative Winkel interpretiert man im Kontext von Bogenlängen als Drehungen im Uhrzeigersinn. Eine Drehung um 90° im Uhrzeigersinn entspricht einer Drehung um 270° gegen den Uhrzeigersinn. Die Bogenlänge im Einheitskreis für -90° beträgt somit $\frac{270}{360} \cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi$, während der zugehörige Bogen zum Winkel 90° die Länge $\frac{1}{2}\pi$ besitzt.

c) Der Radius des Einheitskreises bildet zusammen mit den entsprechenden x- und y-Koordinaten eines Punktes auf der Kreislinie stets ein rechtwinkliges Dreieck. Der Wert des Sinus für den zugehörigen Winkel entspricht in dieser Situation jeweils definitionsgemäß der y-Koordinate. Da die Hypotenuse des Dreiecks den Wert 1 besitzt, müssen beide Katheten (und somit auch die y-Koordinate) kleiner als (oder im Grenzfall gleich) 1 sein. Eine ähnliche Argumentation ist auch für den Kosinus möglich.

d) Der Tangens wird als Verhältnis von Sinus und Kosinus gebildet. Da es Stellen der Funktionsgraphen beider Funktionen gibt, an welchen die Sinuskurve oberhalb der Kosinuskurve liegt, ergeben sich auch Werte größer als 1 (bzw. kleiner als -1) für die Tangenskurve.

➢ Aufgabe 3

a) Es gilt jeweils $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(x-\frac{3}{2}\pi\right) = \cos(x)$. Versucht man so zu transformieren, dass sich $-\sin(x)$ ergibt, kann man folgende Überlegung anstellen: Diese Funktion ist im Vergleich zur Standardsinusfunktion an der y-Achse gespiegelt. Da die Funktion im Intervall $[0{,}2\pi]$ genau einmal oszilliert, lässt sich die Spiegelung auch als Verschiebung um eine halbe Periodenlänge interpretieren. Entsprechend gilt z.B. $\sin(x+\pi) = \sin(x+3\pi) = \sin(x-\pi) = -\sin(x)$.

b) Dies sieht man bereits in Teil a): Es lässt sich stets eine weitere Periodenlänge 2π im Argument hinzuaddieren (oder subtrahieren), ohne dass sich der Funktionsgraph verändert. Dies liefert bei wiederholtem Addieren (oder Subtrahieren) unendlich viele Varianten.

c) Durch Verschiebung in vertikaler Richtung lässt sich dafür sorgen, dass sich beide Funktionen überhaupt nicht schneiden. Durch Verschiebung in horizontaler Richtung kann die Phasenverschiebung beider Funktionen zueinander variiert werden. Verschiebt man um die richtigen Werte, können beide Funktionen sogar deckungsgleich sein, wie wir in a) gesehen haben.

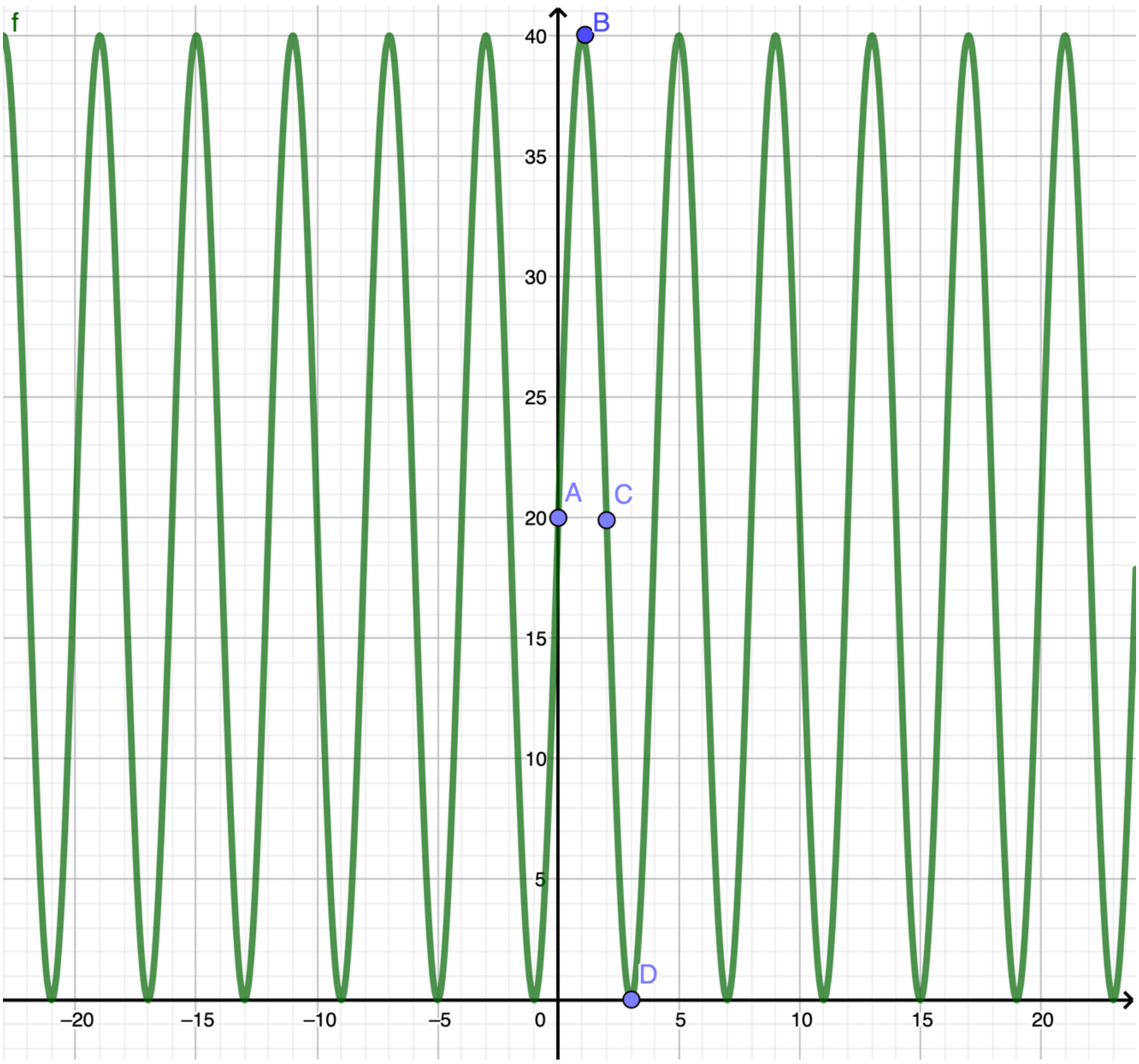
d) Wir gehen von der Standardsinus- und Standardkosinusfunktion aus. Diese schneiden sich im Intervall $[0{,}2\pi]$ genau zweimal. Gehen wir stattdessen von $\sin(2x)$ bzw. $\cos(2x)$ aus, halbiert sich die Periodenlänge, so dass beide Funktionen in besagtem Intervall zweimal schwingen. Entsprechend gibt es wie gewünscht vier Schnittpunkte. Dritteln wir die Periodenlängen stattdessen, d.h. nutzen wir $\sin(3x)$ und $\cos(3x)$, ergeben sich entsprechend sechs Schnittpunkte auf besagtem Intervall. Nutzen wir alternativ $\sin(3{,}5x)$ bzw. $\cos(3{,}5x)$, landet genau ein weiterer Schnittpunkt im Intervall, so dass dann sieben Stück vorliegen.

➢ Aufgabe 4

a) Im Einheitskreis lassen sich die Koordinaten eines Punktes in Abhängigkeit des entsprechenden Winkels durch die Werte der Sinus- bzw. Kosinusfunktion ausdrücken. Da der Sinus die jeweiligen y-Koordinaten beschreibt, nutzen wir die entsprechende Funktion. Damit statt des Einheitskreises ein Riesenrad mit gegebenem Radius beschrieben wird, multiplizieren wir die Werte mit 20. Wir Vergrößern also die Amplitude der Funktion. Ein Funktionsprototyp lautet dann $f(x) = 20 \cdot \sin(x)$. Dieser beschreibt aber die Höhe einer Gondel ausgehend vom horizontalen Durchmesser des Riesenrads. Um die Höhe ausgehend vom Boden zu beschreiben, addieren wir den Radius hinzu, so dass wir den Prototypen zu $f(x) = 20 \cdot \sin(x) + 20$ verbessern. Wir sorgen also für eine vertikale Verschiebung und ändern somit auch die Ruhelage. Hierbei gehen wir davon aus, dass das Rad mit der unteren Kante am Boden aufliegt. Für eine realistischere Lösung müssten also noch wenige weitere Meter hinzuaddiert werden, was wir der Einfachheit halber hier aber unterlassen. Die genannte Funktion gibt nun die Höhe einer Gondel in Abhängigkeit des entsprechenden Winkels an. Um eine Abhängigkeit von der Zeit zu erreichen, multiplizieren wir das

Argument mit $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Dies sorgt dafür, dass die Periodenlänge der Funktion von 2π auf 4 verkürzt wird. Es ergibt sich final $f(x) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 20$.

Die nachstehende Grafik zeigt Den Funktionsgraphen dieser Funktion. Die vier Punkte sind vier ausgewählte Positionen einer Gondel während ihrer vierminütigen Fahrt. Die Fahrt beginnt (noch unrealistischerweise) in einer Höhe von 20 Metern am rechten äußeren Punkt des Kreises (Punkt A) und verläuft gegen den Uhrzeigersinn. Nach einer Minute ist die Gondel auf maximaler Höhe (Punkt B) und sinkt dann bis zum äußersten linken Punkt wieder um 20 Meter ab (Punkt C). Nach insgesamt drei Minuten ist sie am untersten Punkt des Riesenrads (Punkt D) angekommen.



Der Startpunkt der Gondel lässt sich ändern, wenn man die Funktion entlang der x-Achse verschiebt (und somit eine phasenverschobene Variante der ersten Funktion erzeugt). Damit etwa die Fahrt am untersten Punkt beginnt, bietet sich eine Verschiebung um eine Einheit (d.h. eine Minute) nach rechts an. Die Funktion $g(x) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) + 20$ beschreibt somit eine realistischere Startposition in der unteren Mitte des Rades.

b) Hierzu muss der Vorfaktor $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ abgeändert werden. Der Faktor $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ sorgt etwa für die doppelte Fahrtzeit von acht Minuten. Entsprechend wird der Graph in x-Richtung gestreckt und die Periodenlänge verdoppelt sich. Wird die Zeit verkürzt, wird der Graph entsprechend gestaucht und die Periodenlänge verkürzt sich.

c) Hierfür verwendet man z.B. statt des Faktors $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ den Faktor $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$. Dies sorgt dafür, dass eine Umdrehung statt nach vier Minuten nach 360 Grad abgeschlossen ist. Die Funktion wird also sehr stark in x-Richtung gestreckt. Stellt man eine zeitliche Abhängigkeit dar, wird der Graph z.B. durch Verdoppelung der Zeit gestreckt. Stellt man allein die Abhängigkeit vom aktuellen Drehwinkel dar, haben Änderungen der Drehgeschwindigkeit keine Auswirkungen auf den Graphen.

➢ Aufgabe 5

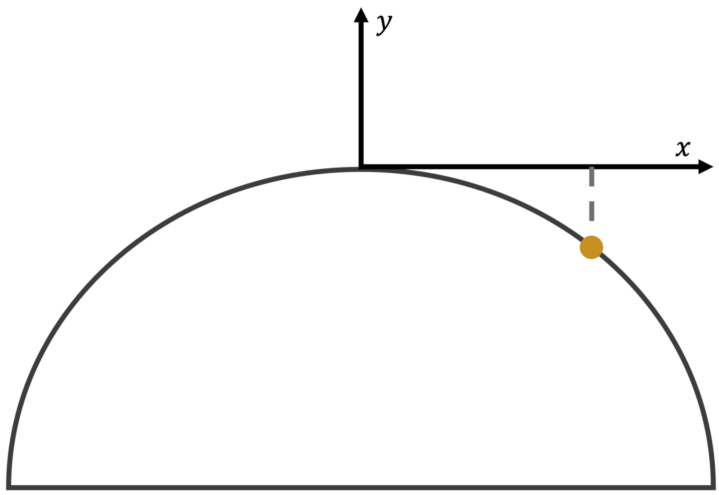
a) Eine entsprechende Funktion s besteht aus zwei Teilfunktionen s_x und s_y, die die entsprechende x- bzw. y-Koordinate entsprechender Positionen angeben. Denkt man die Uhr auch hier wieder zunächst als Einheitskreis, lassen sich beide Funktionen gut über die Kosinus- bzw. Sinusfunktion modellieren. Ähnlich wie bei Aufgabe 4 strecken wir die Werte um den Radius der Uhr und somit um den Faktor 10. Damit eine Umdrehung nicht 2π, sondern 12 Stunden beträgt, skalieren wir mit dem Faktor $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$. Da zum Zeitpunkt 0 der Stundenzeiger nicht auf 3 Uhr zeigen soll, verschieben wir den Funktionsgraph beider Funktionen um 3 Stunden entlang der x-Achse nach links. Da Winkel innerhalb der Mathematik stets gegen den Uhrzeigersinn orientiert sind und entsprechend auch Sinus- und Kosinus-Funktion so orientiert sind, dass sich der im Einheitskreis betrachtete Winkel gegen den Uhrzeigersinn öffnet, würde auch unsere Uhr derzeit in entgegengesetzte Richtung laufen. Um dies zu ändern, werden beide Funktionsgraphen abschließend an der y-Achse gespiegelt, was dadurch erreicht werden kann, dass x jeweils durch $-x$ ersetzt wird. Entsprechend ergeben sich die Funktionsgleichungen $s_x(x) = 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}(-x+3)\right)$ bzw. $s_y(x) = 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}(-x+3)\right)$.

Achtung: x beschreibt hier nicht die x-Koordinate, sondern die entsprechende Uhrzeit in Stunden. Die Funktion, die zu jeder Uhrzeit in Stunden die vollständige Position der Zeigerspitze im Koordinatensystem angibt, lautet somit $s(x) = \begin{pmatrix} s_x(x) \\ s_y(x) \end{pmatrix}$. Das Abschließende Spiegeln hat für s_y zudem technisch gesehen keine Auswirkungen, da die Funktion symmetrisch zur y-Achse ist.

b) Eine Funktion m bildet man ganz ähnlich. Statt in Stunden denkt man in Minuten und nutzt daher den Streckfaktor $\frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$ statt $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

➢ Aufgabe 6

Für diese Aufgabe betrachten wir die obere Hälfte der Kugel zweidimensional, d.h. als Halbkreis. Die relevante Länge ist dann jeweils nicht die Länge innerhalb der Kreislinie, sondern jene außerhalb. Die folgende Grafik stellt eine Skizze der entsprechenden Situation dar:



Zur Modellierung dieser Situation geht man wieder von einem Einheitskreis aus. Da offenbar die y-Koordinaten der Punkte auf der Kreisbahn relevant sind, nutzt man zudem die Sinus-Funktion und beginnt somit mit dem Prototypen $f(x) = \sin(x)$. Da es sich tatsächlich um einen Kreis mit Radius 3 handelt, verändern wir diesen zu $f(x) = 3 \cdot \sin(x)$. Mit einer zusätzlichen Verschiebung um drei Einheiten nach unten wird man dem Umstand gerecht, dass der Mittelpunkt des Kreises nicht im Ursprung des Koordinatensystems, sondern entsprechend auf der y-Achse verschoben liegt. Es ergibt sich $f(x) = 3 \cdot \sin(x) - 3$. Die Funktion f beschreibt jetzt die y-Koordinaten auf der dargestellten Halbkreislinie in Abhängigkeit des entsprechenden Winkels im Bogenmaß $x \in [0, \pi]$. Die Funktionswerte sind entsprechend nicht positiv.

Um die Länge l oberhalb der dargestellten Kreislinie zu beschreiben (ein Beispiel bildet die gestrichelte Linie), setzen wir $l(x) = -f(x) + 5 = -3\sin(x) + 8$. Hierbei ergibt sich die zusätzliche Addition mit 5 aus dem Umstand, dass die oberste Kugel eine zusätzliche Grundaufhängung von 5 Metern benötigt.

Möchte man stattdessen in Grad rechnen, kann man x noch mit $\frac{2\pi}{360}$ multiplizieren.

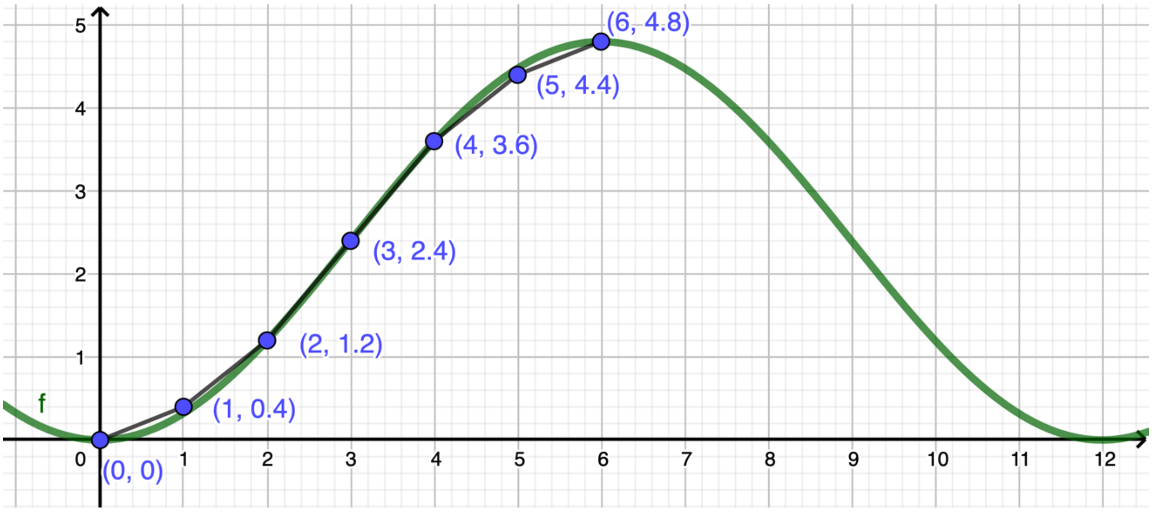
➢ Aufgabe 7

a) Damit eine Kosinusfunktion den Wasserstand zur gegebenen Situation beschreiben kann, transformieren wir sie wie folgt: Da der Kosinus zum Zeitpunkt $x = 0$ gerade seine positive Amplitude einnimmt, spiegeln wir die Funktion an der x-Achse, um zu diesem Zeitpunkt die geringste Ausprägung zu erreichen. Hierzu geben wir der Funktion negatives Vorzeichen. Die Funktion muss zwischen einem Minimalstand von 0 und einem Maximalstand von 4,8 schwingen, daher nutzen wir den Vorfaktor 2,4 und addieren noch einmal 2,4 hinzu, um die Ruhelage entsprechend zu verschieben. Da die Dauer zwischen Ebbe und Flut sechs Stunden beträgt, multiplizieren wir das Argument x mit dem Vorfaktor $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, um eine Periodenlänge von 12 Stunden zu erzielen (Zeitraum zwischen Ebbe und Flut und Übergang zur erneuten Ebbe). Insgesamt liefert dies den Term $f(x) = -2{,}4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2{,}4$.

b) Wir rechnen entsprechend der Zwölftelregel in der Höheneinheit $\frac{4{,}8}{12} = 0{,}4\ [m]$ sowie in der Zeiteinheit $\frac{6}{6} = 1\ [h]$. Folgt man der Regel ergeben sich die folgenden Wasserstände:

Zeit	0	1	2	3	4	5	6
Pegel	0	0,4	1,2	2,4	3,6	4,4	4,8

Die folgende Grafik zeigt die Funktion f und die entsprechenden Näherungspunkte, die aus der Zwölftelregel resultieren, in einem gemeinsamen Diagramm.



c) Beide Kurven sind sich sehr ähnlich. Die Zwölftelregel scheint die Kosinusfunktion gut zu approximieren. Welche Werte näher am realen Wasserstand liegen, lässt sich ohne entsprechendes Experiment nicht einschätzen. Unrealistisch ist, dass die jeweiligen Verbindungsstrecken der über die Regel bestimmten Punkte linear sind. Insgesamt scheint es sich bei der Regel jedoch um eine praktische Faustregel zu halten, da der benötigte mathematische Aufwand deutlich geringer ausfällt.