Exponentialfunktionen und ihre Gleichungen

Check-out

➢ Aufgabe 1

Wir betrachten hier jeweils $f(x) = e^x$ als Ausgangsvorschrift, führen die genannten Operationen aus und vergleichen das entsprechende Ergebnis mit der Ausgangsvorschrift.

a) Es gilt dann $f(x+1) = e^{x+1} = e^x \cdot e^1 = e \cdot e^x = e \cdot f(x)$, d.h. der Funktionswert ver-e-facht sich. Dies ist eine charakteristische Eigenschaft für eine Exponentialfunktion und gilt auch bei allgemeiner Basis a.

b) Es gilt dann $f(x-2) = e^{x-2} = e^x \cdot e^{-2} = \frac{1}{e^2} \cdot e^x = \frac{1}{e^2} \cdot f(x)$, d.h. der Funktionswert wird doppelt durch e geteilt.

c) Upps, hier hätte „vergrößert" stehen sollen. Hier hat man jetzt vielleicht schon eine Vermutung, auch ohne zu rechnen: Der Wert wird zweimal ver-e-facht, d.h. ver-e^2-facht. Dies lässt sich so nachweisen: $f(x+2) = e^{x+2} = e^x \cdot e^2 = e^2 \cdot f(x)$.

d) Es gilt dann $f(2 \cdot x) = e^{2 \cdot x} = (e^x)^2 = \left(f(x)\right)^2$, d.h. das Ergebnis wird quadriert.

e) Es gilt dann $f\left(\frac{x}{2}\right) = e^{\frac{x}{2}} = (e^x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e^x} = \sqrt{f(x)}$, d.h. aus dem Ergebnis wird die Wurzel gezogen.

f) Es gilt dann $f(3 \cdot x) = e^{3 \cdot x} = (e^x)^3 = \left(f(x)\right)^3$, d.h. das Ergebnis wird „hoch drei genommen". Man sagt auch, das Ergebnis wird kubiert.

g) Es gilt dann $f\left(\frac{x}{3}\right) = e^{\frac{x}{3}} = (e^x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e^x} = \sqrt[3]{f(x)}$, d.h. aus dem Ergebnis wird die dritte Wurzel gezogen.

➢ Aufgabe 2

a) Wir beschreiben den Sachzusammenhang mit der Funktion $f(x) = 2^{x-1}$, die jedem Feld x die Anzahl der Reiskörner $f(x)$ zuordnet. Für das erste Feld ergibt sich somit $f(1) = 2^{1-1} = 2^0 = 1$ Reiskorn. Für das zweite Feld $f(2) = 2^{2-1} = 2^1 = 2$ Reiskörner, usw. Das scheint zu passen! Teilt man die Anzahl der Reiskörner durch 50, erhält man das Ergebnis in Gramm. Teilt man zusätzlich durch 1000 stattdessen in Kilogramm. Die Funktion $g(x) = \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{1000} f(x) = \frac{1}{50000} \cdot f(x) = \frac{1}{50000} 2^{x-1}$ liefert also das Gewicht der Körner auf dem x-ten Feld in Kilogramm.

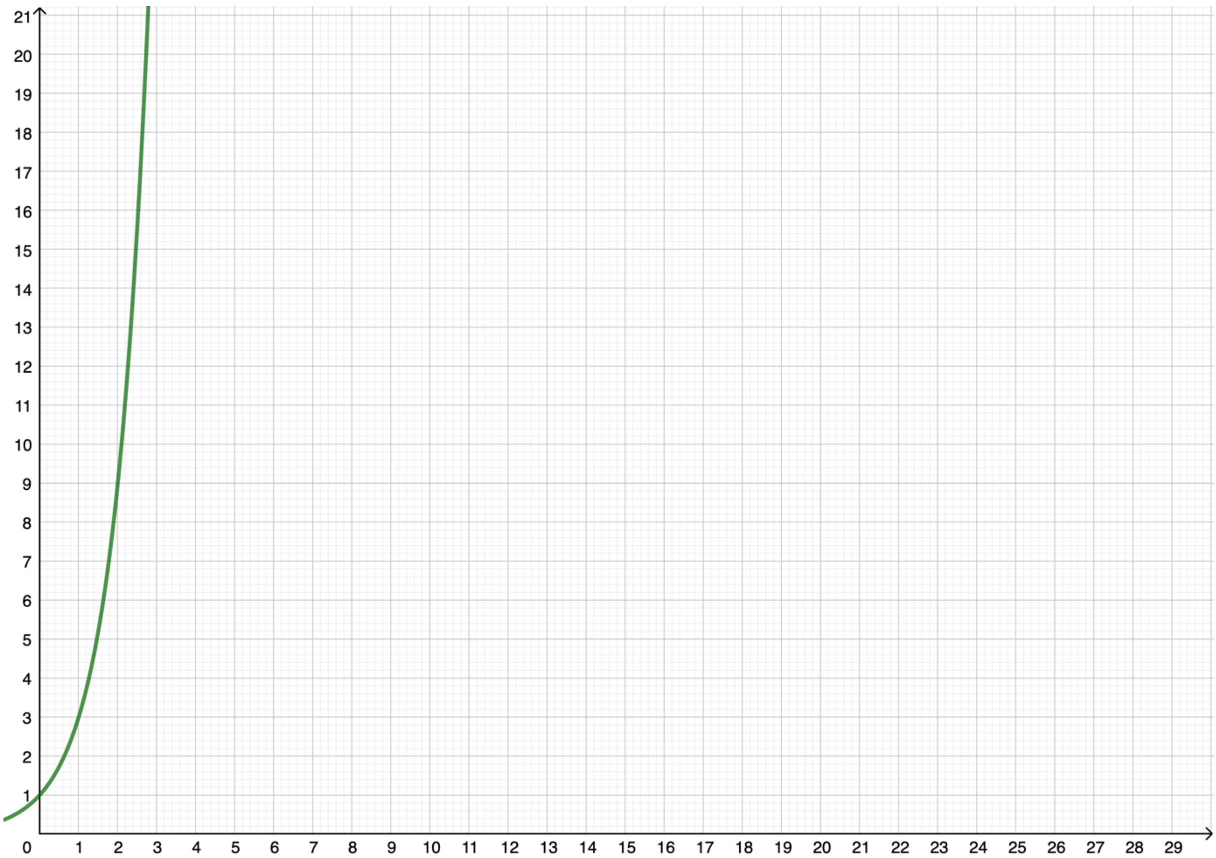
b) Da die Funktion f bzw. g sich jeweils nur auf die Anzahl bzw. das Gewicht der Körner auf einem *einzelnen* Feld bezieht, muss zusätzlich aufsummiert werden. Für das fünfte Feld ergibt sich so z.B. $g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + g(5) = \frac{1}{50000}(2^{1-1} + 2^{2-1} + 2^{3-1} + 2^{4-1} + 2^{5-1}) = \frac{1}{50000}(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4) = \frac{1}{50000} \cdot 31 = 0{,}00062$. Das sind noch lange nicht ein Kilogramm. Wir müssten also die entsprechenden Funktionswerte weiter aufsummieren. Das ist mühselig, führt aber zum Ziel.
Schneller geht es mit folgender Beobachtung: Bildet man – so wie hier – die Summe aufsteigender Zweierpotenzen, gleicht diese gerade der nachfolgenden Zweierpotenz bis

auf eine Einheit. In Formeln: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$. Auf unsere Situation übertragen lässt sich somit z.B. die Funktion $h(x) = g(1) + g(2) + \cdots + g(x)$ bilden, die das Gewicht in Kilogramm aller Reiskörner bis zum x-ten Feld bildet. Für die gilt dann $h(x) = \frac{1}{50000}(2^x - 1)$.
Die Aufgabe fragt somit danach, wann $h(x) = 1$ und somit $\frac{1}{50000}(2^x - 1) = 1$ gilt. Dies lässt sich zu $2^x = 50001$ umformen. Durch Anwenden des dualen Logarithmus ($\log_2$) auf beiden Seiten, folgt rechnerisch $x \approx 15{,}6097$. Somit wird bis zum 15. Feld knapp unter einem Kilogramm Reis benötigt. Für das 16. Feld ist ein Kilogramm dann nicht mehr ausreichend. Das Gleiche lässt sich natürlich auch ohne den Logarithmus durch Ausprobieren herausfinden.

c) Ein solches Schachbrett hat insgesamt 64 Felder. Da nun wieder nach der Stückzahl und nicht der Masse gefragt ist, nutzen wie die Funktion $h^*(x) = 2^x - 1$. Es ergibt sich $h^*(64) = 2^{64} - 1 \approx 1{,}84 \cdot 10^{19}$.

➢ Aufgabe 3

Die Situation kann man sich wie in folgender Grafik dargestellt vorstellen: Ein DIN-A4-Blatt hat im Querformat eine Breite von 29,7 cm und eine Höhe von 21,0 cm. Der Graph der Funktion $f(x) = 3^x$ würde also in etwa wie dargestellt aussehen, wenn man die Ränder des Blattes als Koordinatenachsen nutzt. Hierbei verlässt er bereits für x-Werte zwischen 2 cm und 3 cm das Blatt am oberen Rand.

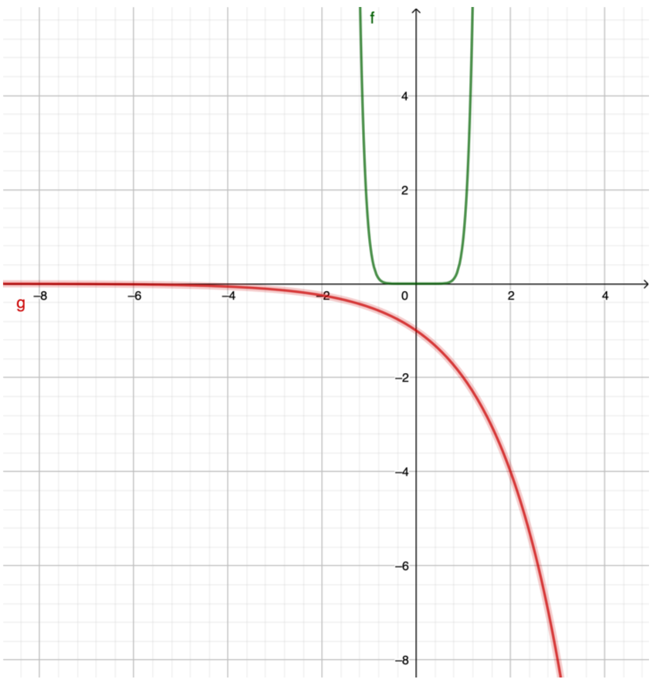


a) Angesichts der schieren Größe des Erdballs dürfte man bei dieser Frage wohl skeptisch sein. Setzt man den Graphen über den Rand des Papierblattes hinaus fort, kommt dieser jedoch tatsächlich nach einer Umrundung der Erde erneut auf diesem an – und das sogar mehrmals bei mehrmaligem Umlaufen. Dies sehen wir im nächsten Aufgabenteil.

b) Der Erdumfang beträgt am Äquator etwa 40075 km. Interessant ist nun also, welchen Wert die Funktion am rechten Rand des Blattes, d.h. bei $x = 29{,}7$ annimmt und ob dieser Wert die Länge des Äquators überschreitet. Hierzu bestimmen wir direkt den entsprechenden Wert und teilen ihn durch den Äquator. Um in derselben Einheit zu rechnen, müssen wir diesen noch in Zentimeter umformen. Hier beträgt dieser 4007500000 cm. Die Rechnung lautet also: $\frac{f(29{,}7)}{4007500000} = \frac{3^{29{,}7}}{4007500000} \approx 36951{,}13$. Insgesamt umrundet der Graph von f die Erde in diesem Maßstab also über 36951 Male, was die ungeheure Macht exponentiellen Wachstums noch einmal unterstreicht.

➢ Aufgabe 4

a) Wir gehen von einer allgemeinen Exponentialfunktion der Form $g(x) = k \cdot a^x$ aus. Die Aussage ist nicht korrekt, da z.B. $g(x) = -2^x$ ausschließlich negative Funktionswerte besitzt. Die Funktion $f(x) = x^{10}$ hat hingegen (bis auf 0) nur positive Funktionswerte. In diesem Fall sind genau zwei Schnittpunkte also nicht möglich, wie man auch anhand der entsprechenden Funktionsgraphen vermuten kann.



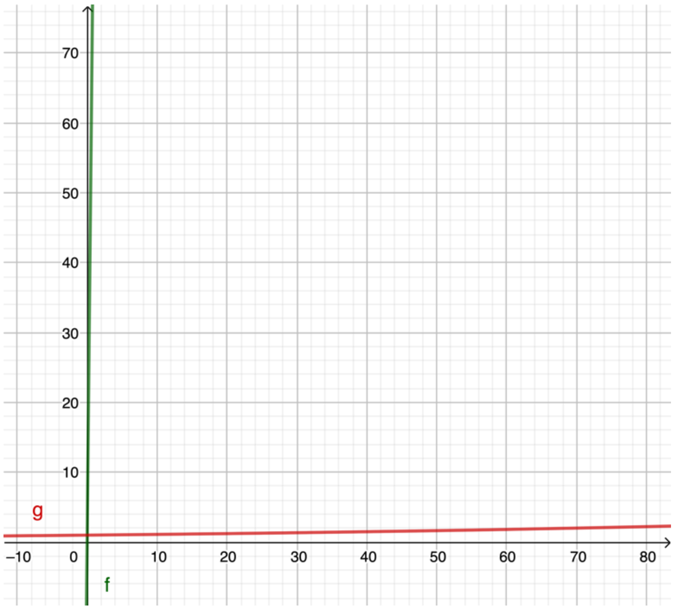
b) Auch diese Aussage ist nicht korrekt. Tatsächlich ist es umgekehrt: Exponentielles Wachstum ist für hinreichend große x größer als die Wachstumsgeschwindigkeit einer Potenzfunktion.

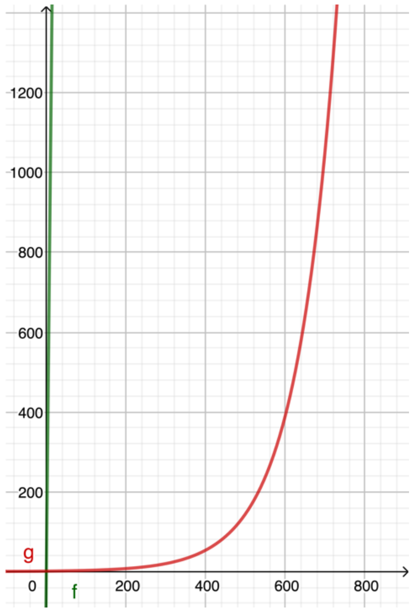
c) Diese Aussage ist wahr und lässt sich z.B. der Tabelle in Abschnitt 6.3.1 entnehmen. Auch ein rechnerischer Nachweis ist möglich, z.B. für $k > 0$ und $a > 1$: Seien x_1 und x_2 zwei Stellen der x-Achse mit $x_1 < x_2$, dann muss $f(x_1) \leq f(x_2)$ gelten, falls die Funktion monoton steigend ist. Hiermit erhält man $k \cdot a^{x_1} \leq k \cdot a^{x_2}$ und daraus $a^{x_1} \leq a^{x_2}$, wenn man auf beiden Seiten durch k teilt. Weiterhin folgt $0 \leq a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_2 - x_1}$. Da eine solche Potenz immer positiv ist, ist die Aussage wahr. Man hätte sogar strenge Monotonie fordern können. Untersucht man einen der anderen Fälle (z.B. $k < 0$, $a > 1$) muss man noch berücksichtigen, dass sich die Richtung des Ungleichheitszeichens durch das Dividieren einer negativen Zahl auf beiden Seiten dreht.

d) Diese Aussage ist falsch. Es gibt noch einen weiteren Punkt. Um diesen dreht sich die folgende Aufgabe.

➢ Aufgabe 5

Beide Anlagemodelle lassen sich durch Funktionen beschreiben. Hierbei gehen wir stets davon aus, dass x die Zeit in Wochen bezeichne. Dann lässt sich der Gesamtbetrag bei einer wöchentlichen konstanten Zinszahlung von 100 € mit der Funktion $f(x) = 100x + 1$ beschreiben. Eine Zinszahlung von 1 % wöchentlich lässt sich mithilfe einer Exponentialfunktion mit Basis 1,01 modellieren, d.h. hier gilt $g(x) = 1 \cdot 1{,}01^x$ für das Gesamtkapital. In den ersten Wochen scheint die Sache klar, wie die folgende Abbildung (links) zeigt. Hiernach ist das lineare Zinsmodell klar zu bevorzugen. Erst später holt das Exponentialmodell deutlich auf, wie die zweite Abbildung (rechts) durch Herauszoomen erkennen lässt.





Rechnerisch lässt sich der „Break-even“ beider Modelle durch Gleichsetzen ermitteln. Danach gilt $100x + 1 = 1{,}01^x$. Durch probierendes Einsetzen oder ein Computer-Algebra-System lässt sich eine Schnittstelle von $x \approx 1173$ ermitteln. D.h. nach etwa $\frac{1173}{52} \approx 22{,}56$ Jahren ist das exponentielle Verzinsungsmodell hier tatsächlich besser, obwohl eine Wöchentliche Hinzugabe von 100 € auf den ersten Blick sehr attraktiv ist.

➢ Aufgabe 6

Die folgenden Teilaufgaben lassen sich jeweils gut im Kopf lösen, wenn man sich die Definition des Logarithmus noch einmal vergegenwärtigt: Der Logarithmus zur Basis a von einem Wert fragt jeweils nach der Zahl, mit der man a potenzieren muss, damit sich der gegebene Wert ergibt.

a) $\log_a 1 = 0$, denn $a^0 = 1$
b) $\log_2 8 = 3$, denn $2^3 = 8$
c) $\log_a a^x = x$, denn $a^x = a^x$
d) $\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, denn $3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}}$
e) $\log_x \frac{1}{x} = \log_x x^{-1} = -1$, denn $x^{-1} = x^{-1}$

➢ Aufgabe 7

Die gesuchten Werte lauten zeilenweise und ggfs. gerundet: 3, 1,863, 3,213, 0,130, 0,063, 0,5, 1,259, 1000000000, 6, 2,054

➢ Aufgabe 8

a) Es ergibt sich eine Exponentialfunktion.
b) Es ergibt sich eine Potenzfunktion.
c) Die Gleichung lässt sich zu $\sqrt[c]{b^c} = \sqrt[c]{a}$ umformen, wenn auf beiden Seiten die c-te Wurzel angewendet wird (und alle Voraussetzungen hierfür erfüllt sind). Hieraus folgt $b = \sqrt[c]{a}$. Es ergibt sich also eine Wurzelfunktion bei der das Argument nicht der Wert unter der Wurzel (sog. Radikand) ist, sondern der Wert am Wurzelzeichen (hier c).
d) Mit derselben Umformung wie oben erkennt man hier, dass sich ebenfalls eine Wurzelfunktion ergibt. Diesmal ist jedoch der Radikand das Argument der Funktion.
e) Hier ergibt sich eine Logarithmusfunktion entsprechend seiner Definition. Dies erkennt man auch, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung den Logarithmus zur Basis b anwendet: $\log_b a = \log_b b^c = c$.
f) Hier ergibt sich ebenfalls eine Logarithmusfunktion, nur dass diesmal die Basis b das Argument der Funktion ist. Auch hier kann die vorangegangene Umformung herangezogen werden.