Exponentialfunktionen und ihre Gleichungen

Check-in

➢ Aufgabe 1

Die im Kapitel angegebenen Werte beziehen sich immer auf „Januar“ oder „Anfang des Jahres“. Ausgehend von 20 qm Anfang 1995 scheint sich die Population über 40 qm im nächsten und 80 qm im übernächsten Jahr bis hin zu 160 qm Anfang 1998 jährlich zu verdoppeln. Als grobe Überschlagsrechnung lässt sich somit erwarten, dass die Population im September 1998 eine Größe zwischen 160 qm und dem zu erwartenden Wert Anfang 1999, nämlich 320 qm, hat.

➢ Aufgabe 2

Ausgehend von obigen Überlegungen lässt sich auch allgemeiner die Funktion $f(x) = 20 \cdot 2^x$ aufstellen, die jedem Jahr die entsprechende Hyazinthenfläche zuordnet. Hierbei entspricht das erste Jahr des Datensatzes, 1995, gerade $x = 0$. Werten wir die Funktion an der Stelle $x = 3$ aus, erhalten wir den im Text angegebenen Wert für das Jahr 1998 (nämlich 160 qm). Mit $x = 4$ wären wir bei Januar 1999, usw. Da der September der 9. Monat des Jahres ist, werten wir die Funktion bei $x = 3 + \frac{9}{12} = 3{,}75$ aus. Dies liefert $f(3{,}75) = 20 \cdot 2^{3{,}75} \approx 269$ als genauere Schätzung für den Bestand im September 1998.

➢ Aufgabe 3

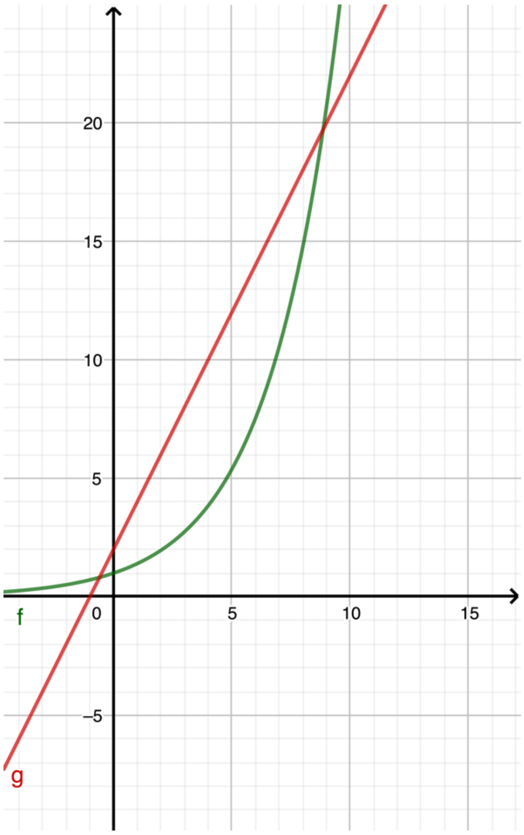
Als Funktionsterm passt hier $f(x) = 2 \cdot 4^x$. Hierbei bezeichnet x die vergangenen Jahre, beginnend bei $x = 0$. Mit $f(0) = 2 \cdot 4^0 = 2 \cdot 1 = 2$ ergeben sich dann genau die beiden Eichhörnchen, die anfänglich ausgesetzt wurden.

➢ Aufgabe 4

Dies kann man z.B. durch Ausprobieren herausfinden. Nach $x = 3$ Jahren liegt die Populationsgröße noch unter 1000, nach $x = 4$ Jahren bereits über 1000. Für $x = 3{,}5$ ergibt sich $f(3{,}5) = 1024$. Somit wird der Wert von 1000 Eichhörnchen bereits nach dreieinhalb Jahren überschritten. Dies zeigt die Stärke exponentiellen Wachstums auf.

➢ Aufgabe 5

Dies lässt sich schnell ausmachen, wenn man beide Funktionsgraphen skizziert oder plottet, wie in folgendem Diagramm geschehen:



Hier ist gut erkennbar, dass der lineare Prozess, d.h. die Funktion g, bis zu einem Wert von $x = 9$ oberhalb des exponentiellen Prozesses, d.h. der Funktion f liegt. Ab diesem Punkt überholt der exponentielle Wachstumsprozess dann den linearen.

➢ Aufgabe 6

Falls a einen Wert zwischen 0 und 1 hat, spricht man von exponentiellem Zerfall. Hat a einen Wert größer als 1, spricht man von exponentiellem Wachstum. Für alle anderen Werte von a spricht man im allgemeinen nicht von einem exponentiellen Wachstumsprozess.

➢ Aufgabe 7

Egal was a für einen Wert hat, für $x = 0$ ergibt sich als Funktionswert stets 1, d.h. es gilt $f(0) = 1$ unabhängig von a.

➢ Aufgabe 8

Upps! Hier hätte der zweite Punkt $P_2(2|9)$ heißen sollen. So, wie die Aufgabe im Buch steht, lässt sich keine passende Exponentialfunktion (nicht einmal irgendeine Funktion) finden, da einem x-Wert (0) zwei verschiedene y-Werte (1 und 9) zugeordnet werden. Geht man von der Grundform $f(x) = a^x$ und dem Punkt $P_2(2|9)$ aus, passt die Funktionsgleichung $f(x) = 3^x$. Diese Lösung ist eindeutig, d.h. es gibt keine weitere Exponentialfunktion der genannten Grundform, die durch diese beiden Punkte verläuft. Dass sich nicht für jedes Paar zweier Punkte eine Exponentialfunktion bestimmen lässt, haben wir aufgrund unseres Fehlers schon gesehen. Aber auch wenn die Punkte z.B. den gleichen y-Wert besitzen, lässt sich keine passende Funktion finden.