

Potenzfunktionen, Polynomfunktionen und ihre Gleichungen

Check-out

➤ Aufgabe 1

Das Verhältnis der Höhe stimmt zwar überein, jedoch wird innerhalb der Breite manipuliert und deshalb vermittelt die Grafik ein falsches Bild der Situation. Damit soll erreicht werden, dass die zu erreichende Reduktion nicht so groß ist. Wie wirkt das Bild dadurch? Die Fläche des rechten Rechtecks ist viel kleiner als 60% des linken Rechtecks. Daher erscheint mir der nötige Kraftakt (die Differenz der Flächeninhalte) größer, eine „40-prozentige Reduktion“ zu erreichen. Wie haben Sie es wahrgenommen?

➤ Aufgabe 2

Die richtige Antwort lautet „Sieben!“. Zwei Lösungswege sind denkbar:

- Nach jeder Stunde ist doppelt so viel Luft im Ballon wie eine Stunde zuvor. D.h. wenn nach acht Stunden der Ballon ganz voll ist, ist er nach sieben Stunden halbvoll.
- Man könnte die Aufgabe auch mit Hilfe einer Gleichung rechnerisch lösen, was jedoch deutlich mehr Aufwand darstellt: Man geht dann davon aus, dass nach einer Stunde eine gewisse Menge an Luft im Ballon ist. Diese Menge bezeichnen wir mit a . Dann passt die folgende Tabelle:

Zeitpunkt	1	2	3	4	8
Volumen der Luft	a	$2a = 2^1a$	$4a = 2^2a$	$8a = 2^3a$	$256a = 2^7a$

Bei $V_8 = 2^7a$ ist der Ballon voll gefüllt und es gilt $V_7 = \frac{V_8}{2} = \frac{2^7a}{2} = 2^6a$. Damit ist der Ballon zum Zeitpunkt 7 halb gefüllt.

Bei der Antwort „Vier!“ wurde wahrscheinlich die Stundenzahl halbiert. Das wäre jedoch nur bei einem linearen Wachstum korrekt.

➤ Aufgabe 3

Für die erste Frage ist die folgende Rechnung korrekt: Hälfte von $2^{40000} = \frac{2^{40000}}{2} = 2^{40000-1} = 2^{39999}$. Eine Anmerkung für Lernende könnte lauten: „Achtung, du hast nur die Hälfte der Basis berechnet, nicht die Hälfte der gesamten Potenz / der gesamten Zahl“. Auch eine Erläuterung über ein Gegenbeispiel könnte nützlich sein: „Es gilt $2^3 = 8$. Die Hälfte von 8 ist 4, aber 1^3 ist 1 und nicht. Dagegen wäre $2^{3-1} = 2^2 = 4$.“

Für die zweite Frage ist die folgende Rechnung korrekt: Sechsfaches von $6^{70000} = 6 \cdot 6^{70000} = 6^{70001}$, aber $36^{70000} = (6^2)^{70000} = 6^{140000}$. Weitere Hinweise könnten ähnlich lauten wie in der ersten Teilaufgabe.

➤ Aufgabe 4

Der Eindruck, den die Grafik vermittelt, passt nicht zum wirklichen Geschehen. Es soll offenbar der Eindruck eines viel größeren Wachstums vermittelt werden. Dies wurde durch die 3D-Darstellung unterstützt, bei der die Tiefe immer konstant bleibt und man so – ggfs. unterbewusst – von einer größeren Menge ausgeht. Vor allem durch die Verkürzung der y -Achse, die bei 2500 beginnt, wirkt die Darstellung arg verzerrend.

➤ Aufgabe 5

Hier sind individuelle Lösungen möglich. Beispiele könnten die folgenden Aspekte abdecken: Fläche manipulieren, Abändern des Verhältnisses von Höhe und Breite, Angabe auslassen, usw.

➤ Aufgabe 6

- Diese kann maximal vier Nullstellen besitzen. Da es eine doppelte Nullstelle bei 0 gibt, kann es nur noch maximal drei echt unterscheidbare Nullstellen geben.
- Hier gibt es unendlich viele Möglichkeiten. Am einfachsten lässt sich ein entsprechendes Polynom aus einer Linearfaktorzerlegung wie folgt gewinnen: $f(x) = a \cdot x(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$ mit einem beliebigen Faktor $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Auch hier lassen sich unendlich viele Polynome angeben, z.B. $f(x) = a(x-2)^3$. Dieses erfüllt wieder für jeden beliebigen Faktor $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die gewünschten Anforderungen.
- Aus der allgemeinen Form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ lässt sich durch Einsetzen der gegebenen Koordinaten (d.h. $f(1) = 3$, $f(-1) = -3$ und $f(2) = 12$) unmittelbar auf das Gleichungssystem $a + b + c + d = 3$, $-a + b - c + d = -3$ und $8a + 4b + 2c + d = 12$ schließen, welches offenbar unendlich viele Lösungen aufweist. Für uns ist es ausreichend auf eine dieser Lösungen zu schließen, so dass wir z.B. $d = 0$ setzen. Das dann resultierende Gleichungssystem lässt sich zu $a = 1$, $b = 0$ und $c = 2$ auflösen. Eine Funktion, die die Anforderungen erfüllt, lautet also $f(x) = 1x^3 + 0x^2 + 2x + 0 = x^3 + 2x$.
- Hier liegt offenbar ein Polynom vierten Grades vor. Dies erkennt man daran, dass der Graph sowohl mit immer größer als auch mit immer kleiner werdenden x -Werten positiv wächst, weshalb der Grad eine gerade Zahl sein muss. Da es drei Nullstellen gibt, von denen eine eine doppelte ist (jene bei 1), ergibt sich der vierte Grad. Insgesamt lassen sich Nullstellen bei -2, 0 und 1 anhand des Graphen ablesen. Insgesamt führt dies auf einen Funktionsterm der Form $f(x) = a(x+2)x(x-1)^2$. Durch Einsetzen eines weiteren Punktes (z.B. $(-1 | -4)$) lässt sich auch zu $a = 1$ bestimmen. Insgesamt erhält man so $f(x) = (x+2)x(x-1)^2 = x^4 - 3x^2 + 2x$ als Funktionsvorschrift.