Potenzfunktionen, Polynomfunktionen und ihre Gleichungen

Check-in

➢ Aufgabe 1

Bei der Prüfung, ob ein Zusammenhang sich mit einer Potenzfunktion beschreiben lässt, ist es hilfreich, Struktur des Terms zu betrachten, der den Zusammenhang modelliert.
Alle Zusammenhänge lassen sich durch eine Potenzfunktion ausdrücken.

a) Umfang eines Kreises U in Abhängigkeit vom Radius r (hier die unabhängige Variable) lässt sich beschreiben durch $U(r) = 2\pi \cdot r$.
Dies eine Potenzfunktion ersten Grades (r^1), eine proportionale Funktion.

b) Volumen eines Würfels V in Abhängigkeit von der Kantenlänge a (hier die unabhängige Variable) lässt sich beschreiben durch $V(a) = a^3$.
Dies ist eine Potenzfunktion dritten Grades (a^3).

c) Flächeninhalt eines Quadrats A in Abhängigkeit von der Seitenlänge a (hier die unabhängige Variable) lässt sich beschreiben durch $A(a) = a^2$.
Dies ist eine Potenzfunktion zweiten Grades (a^2).

d) Volumen eines zentrisch gestreckten Körpers V in Abhängigkeit vom Streckfaktor n (hier die unabhängige Variable) lässt sich beschreiben durch $V(n) = V_n = n^3 \cdot V_1 = V_1 \cdot n^3$, dabei ist V_1 das Volumen des ursprünglichen Körpers bevor die Seitenlänge in allen drei Dimensionen gestreckt werden. Dies ist eine Potenzfunktion dritten Grades (n^3). Die Verdopplung der Seitenlängen ergibt das 2^3-fache an Volumen, die Verdreifachung das 3^3-fache an Volumen, die Ver- n-fachung das n^3-fache des Volumens.

e) Flächeninhalt einer zentrisch gestreckten Fläche A in Abhängigkeit vom Streckfaktor n (hier die unabhängige Variable) lässt sich beschreiben durch $A(n) = A_n = n^2 \cdot A_1 = A_1 \cdot n^2$, dabei ist A_1 der ursprüngliche Flächeninhalt bevor die Seitenlänge in allen beiden Dimensionen gestreckt werden. Dies ist eine Potenzfunktion zweiten Grades (n^2). Die Verdopplung der Seitenlängen ergibt den 2^2-fachen Flächeninhalt, die Verdreifachung den 3^2-fachen, die Ver- n-fachung den n^2-fachen des Flächeninhalts.

f) Oberflächeninhalt einer Halbkugel O_{HK} in Abhängigkeit vom Radius r (hier die unabhängige Variable) lässt sich beschreiben durch $O_{HK}(r) = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi \cdot r^2$
Dies ist eine Potenzfunktion zweiten Grades (r^2).

g) Oberflächeninhalt einer Kugel O_K in Abhängigkeit vom Radius r (hier die unabhängige Variable) lässt sich beschreiben durch $O_K(r) = 4\pi \cdot r^2$.
Dies ist eine Potenzfunktion zweiten Grades (r^2).

➢ Aufgabe 2

Zunächst wird der Faktor a im Funktionsterm bestimmt, aufgrund der dritten oder der letzten Spalte in der Tabelle
$-250 = a \cdot (-5)^3 \,|\, :(-5)^3 \Leftrightarrow a = 2$
$2000000 = a \cdot 100^3 \,|\, :100^3 \Leftrightarrow a = 2$, also $f(x) = 2 \cdot x^3$

x	-10	-8	-5	$-1/2$	-1	-0,5	3	5	10	100
$f(x)$	-2000	-1024	-250	-0,25	-2	$-0{,}25$	54	250	2000	2000000

➢ Aufgabe 3

Individuelle Lösungen sind möglich. Man muss nur sicherstellen, dass Graph durch den Punkt (-1|2) verläuft, also die Gleichung $2 = f(-1)$ erfüllt ist.
Zum Beispiel: $f(x) = 2x^2$, $g(x) = -2x^3$, $h(x) = -2x$, $k(x) = 2x^{2n}$, $l(x) = -2x^{2n-1}$, wobei $n \in \mathbb{N}$.

➢ Aufgabe 4

Dies ist mithilfe der Potenzgesetze oder über das Rückführen auf die Definition der Potenz zu lösen. Es werden drei Gruppen von gleichwertigen Termen deutlich:

Gruppe 1: $a^{3-2} = a^1$, (oder über $\frac{a^3}{a^2}$)
Gruppe 2: $a^5 = a^3 \cdot a^2$ (oder $(a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a)$), da $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ gilt.
Gruppe 3: $a^6 = (a^3)^2 = (a^2)^3 = a^3 \cdot a^3$, da $a^x = (a^m)^n = a^{m \cdot n}$ gilt.

➢ Aufgabe 5

Lösungsweg durch Systematisches Probieren mit Hilfe einer Tabelle:

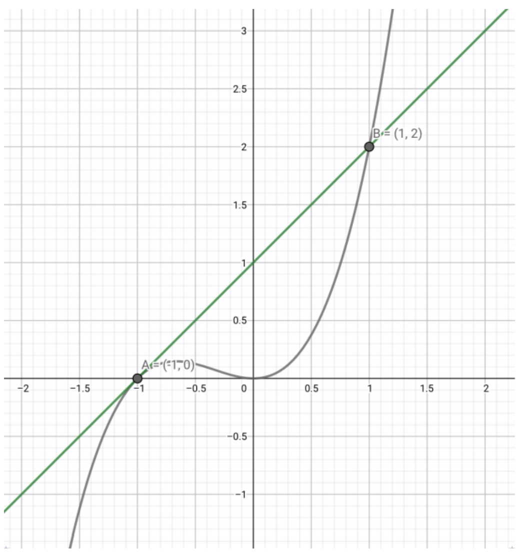
$x^3 + x^2 = x + 1$

x	$x^3 + x^2$	$x + 1$	Vergleich
-2	$(-2)^3 + (-2)^2 = -4$	$-2 + 1$	-4 ≠ -1
-1	$(-1)^3 + (-1)^2 = 0$	$-1 + 1$	0 = 0
0	$0^3 + 0^2 = 0$	$0 + 1$	0 ≠ 1
1	$1^3 + 1^2 = 2$	$1 + 1 = 2$	2 = 2

⇨ Die Lösungsmenge beträgt $\mathbb{L} = \{1; -1\}$

Graphischer Lösungsweg (Ablesen von gemeinsamen Punkten der beiden Graphen und ablesen und ggf. in den beiden Termen überprüfen)

$f(x) = x^3 + x^2$
$g(x) = x + 1$



Die Graphen schneiden sich im Punkt (-1|0) und (1|2). Dadurch liegen für x = -1 und für x = 1 jeweils ein Schnittpunkt vor. Einsetzen der beiden x-Werte in die beiden Terme ergibt jeweils die richtigen y- Werte 0 und 2.

Algebraischer Lösungsweg:
Lösen der Gleichung $x^3 + x^2 = x + 1$mit Hilfe eines Rechners oder durch Polynomdivision (wie folgt):
$x^3 + x^2 = x + 1 \Leftrightarrow 0 = x^3 + x^2 - x - 1$

1. Raten einer Nullstelle z.B. -1
2. Berechnung

$$\begin{array}{rl} & x^3 + x^2 - x - 1 : (x+1) = x^2 - 1 \\ - & \underline{(x^3 + x^2)} \\ & \quad 0 - x - 1 \\ & \underline{- \quad (-x - 1)} \\ & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

3. Ermitteln der weiteren Nullstelle durch Lösen des Restpolynoms $x^2 - 1$
   $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \implies \mathbb{L} = \{-1; 1\}$

➢ Aufgabe 6

Term 1 (($f(x) = -x^{0,5}$) gehört zu Abbildung D.
Mögliche Begründung: Typische Form: Graph einer Wurzelfunktion, die nach unten gespiegelt ist (dadurch monoton fallend) ist - deshalb negativer Faktor vor der Potenz im

Term2 Nullstelle (0|0), Funktionsterm ist für x < 0 nicht definiert
Term 2 ($f(x) = -\frac{1}{3}x^7 - 3$) gehört zu Abbildung C
Mögliche Begründung: Typische Form: Graph einer Potenzfunktion mit ungeradem Exponenten und negativem Faktor vor der Potenz., um drei Einheiten an der y- Achse nach unten verschoben (Punktsymmetrie zu (0|-3)).

Term 3 ($f(x) = 0.5x^4 - 3x^2$) passt zu Abbildung A
Mögliche Begründung: Typische Form: Symmetrie zur y-Achse, Funktion, die aus lauter Potenzen mit geradem Exponenten bestehen; drei Nullstellen, was nach Umformung des Terms deutlich wird: $f(x) = x^2(0.5x^2 - 3)$. Am Graphen erkennt man auch, dass eine Nullstelle eine doppelte ist, also Funktion 4. Grades; durch das positive Vorzeichen bei $0.5x^4$ wird deutlich, dass der Graph nach oben geöffnet sein muss.

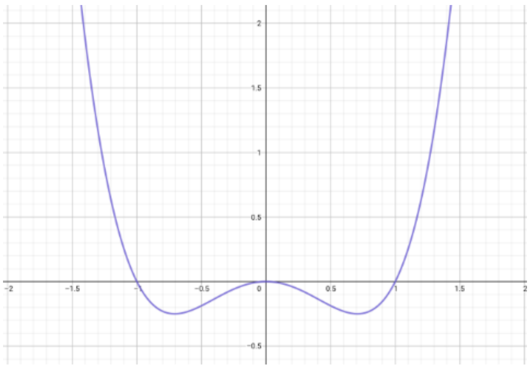
Term 4 ($f(x) = x^3$) passt zu Abbildung B
Mögliche Begründung: Typische Form des Graphen zeigt von Funktion dritten Grades; punktsymmetrisch zum Ursprung, eine Nullstelle.

➢ Aufgabe 7

Eigenschaften der Funktion $f(x) = x^4 - x^2$

- Die Funktion ist nach oben geöffnet (positives Vorzeichen vor der Potenz mit dem größten Exponenten)
- Nullstellen bei x = 0 [doppelte Nullstelle], x = 1 und x = -1, da $f(x) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$ gilt, und die Nullstellen abgelesen werden können
- Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da $f(-x) = f(x)$ gilt.

- Lokale Extrempunkte: Hochpunkt bei (0|0), Tiefpunkte bei $(-\frac{\sqrt{2}}{2}|-\frac{1}{4})$ und $(\frac{\sqrt{2}}{2}|-\frac{1}{4})$
- Monotonie:
  - Monoton fallen für x < $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$
  - Monoton steigend für $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$ und $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Wendepunkte bei $(-\frac{\sqrt{6}}{6}|-\frac{5}{36})$ und $(\frac{\sqrt{6}}{6}|-\frac{5}{36})$



Aufgabe 8

Eine Polynomfunktion 6. Grades hat minimal 0 Nullstellen, da der Graph der Funktion nach oben geöffnet und oberhalb der x-Achse oder nach unten geöffnet und unterhalb der x-Achse liegen kann.
Eine Polynomfunktion 6. Grades hat maximal 6 Nullstellen, da das Polynom aus maximal sechs Linearfaktoren entstehen kann. Gäbe es mehr Linearfaktoren, wäre das Polynom höheren Grades.