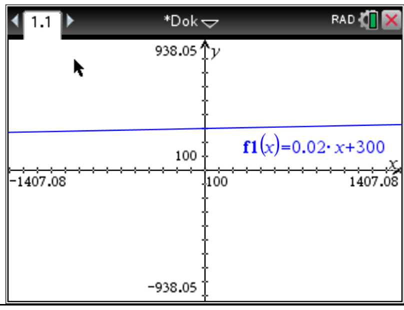
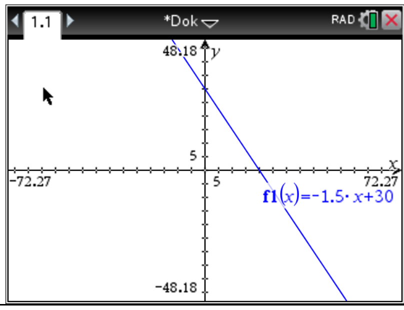
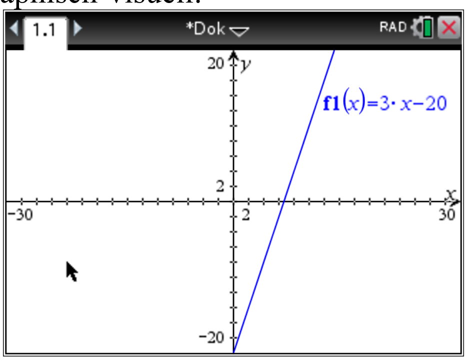
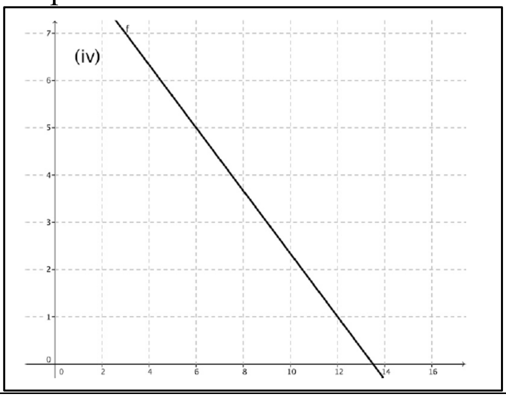
Lineare Funktionen und Gleichungen

Check-out

➢ Aufgabe 1

Zur situativ-sprachlichen und numerisch-tabellarischen Darstellung sind viele individuelle Lösungen möglich, hier ist jeweils nur ein Beispiel angegeben.

<table>
<tr><td rowspan="2">(1)</td><td>Formal-symbolisch:
$f(x) = 0{,}02x + 300$</td><td>Numerisch-tabellarisch:
<table><tr><td>x</td><td>-100</td><td>-5</td><td>0</td><td>1</td><td>5</td><td>10</td><td>200</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>298</td><td>299,9</td><td>300</td><td>300,02</td><td>300,1</td><td>300</td><td>304</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Situativ-sprachlich:
Man geht von einem Grundbetrag von 300 aus, der linear um 0,02 wächst. Z.B. Ich habe ein Gespartes von 300€. Von meiner Schwester bekomme ich nun täglich 2 Cent, weil sie eine Wette gegen mich verloren hat. (Hier nur für xx ∈ $\mathbb{Q}^+$ sinnvoll)</td><td>Graphisch-visuell:

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>Formal-symbolisch:
$f(x) = -1{,}5x + 30$</td><td>Numerisch-tabellarisch:
<table><tr><td>x</td><td>-5</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>10</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>37,5</td><td>31,5</td><td>30</td><td>28,5</td><td>27</td><td>22,53</td><td>15</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Situativ-sprachlich:
Man geht von einem Grundbetrag von 30 aus, der linear um 1,5 sinkt, z.B. Ich habe einen Kontostand von 30€. Ich habe ein Zeitschriftenabo abgeschlossen, sodass mir monatlich 1,50€ abgebucht werden. (Hier nur für x ∈ $\mathbb{Q}^+$ sinnvoll)</td><td>Graphisch-visuell:

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(3)</td><td>Formal-symbolisch:
$f(x) = 3x - 20$</td><td>Numerisch-tabellarisch:
<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>7</td><td>10</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>-20</td><td>-17</td><td>-14</td><td>-5</td><td>1</td><td>10</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Situativ-sprachlich:
Es ist –20 °C, aber die Temperatur soll ab jetzt täglich um 3 °C steigen.</td><td>Graphisch-visuell:

</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td rowspan="2">(4)</td>
<td>Formal-symbolisch:
$$f(x) = -\frac{2}{3}x + 9$$</td>
<td>Numerisch-tabellarisch:
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td><td>15</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>9</td><td>7</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td><td>-1</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Situativ-sprachlich:
Man hat neun Marzipanriegel und isst täglich zwei Drittel eines Riegels.</td>
<td>Graphisch-visuell:

</td>
</tr>
</table>

Hinweis: bei 1 (4) ist in der Aufgabenstellung versehentlich die Tabelle zu 1(2) mit angegeben.

➢ Aufgabe 2

a) Die Graphen f (rot), p (lila), j (hellbraun), q (dunkelbraun), h (grün), (dunkelbraun) sind linear. Man kann jeweils erkennen, dass die Geraden durch zwei Punkte eindeutig festgelegt sind, weshalb dies Graphen zu linearen Funktionen sind. Der Graph g (blau) stellt zwar auch eine Gerade dar, ist aber kein Graph einer Funktion, da die Eindeutigkeit der Funktion nicht gegeben ist, d.h. es gibt zu einem x-wert unendliche viele zugordnete y-Werte. Der Graph r ist keine Gerade, sondern eine gebogene Linie und stellt deshalb keinen Graphen einer linearen Funktion dar.

b) Der Graph j gehört zu einer speziellen linearen Funktion, einer konstanten Funktion, da allen x-Werte derselbe y-Wert zugeordnet wird.
Der Graph h ist eine Ursprungsgerade und gehört demnach zu einer proportionalen Funktion. Da die Steigung 1 beträgt, ist der Graph eine besondere Ursprungsgerade, eine Winkelhalbierende im Koordinatensystem und gehört zur identischen Funktion mit der Gleichung $f(x) = x$.
Die Geraden f und p sind parallel zueinander – die Steigungen der beiden Geraden sind also gleich. Die Gerade q liegt zu beiden Geraden f und p senkrecht, d.h. für die Steigungen von q und f bzw. q und p gilt, dass ihr Produkt (-1) beträgt.

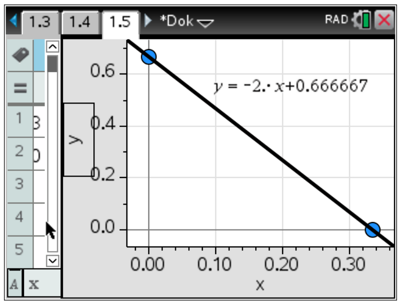
➢ Aufgabe 3

a) Durch Einsetzen der Steigung sowie der Punktkoordinaten erhält man (oder Nutzen der Punkt-Steigungs-Form oder Einzeichnen der Geraden im Graphen und nachträgliches Ablesen): $f(x) = 3x - 2$

b) (i) Durch Einsetzen der Punktkoordinaten erhält man (oder Nutzen der Zwei-Punkte-Form, ggf. Einzeichnen der Punkte im Graphen zum Check):
$g(x) = -\frac{9}{8} \cdot x + \frac{31}{40}$

(ii) Es liegt kein Funktionsgraph vor, da zu dem einen einem x-Wert zwei verschiedene y-Werte existieren.

c) (i) $h(x) = -2x + \frac{2}{3}$



(ii) Wenn es unendlich viele Schnittpunkte mit der x-Achse gibt, kann es sich nur um die konstante Funktion mit $(x) = 0$ handeln.
Wenn es sich um unendliche Schnittpunkte mit der y-Achse handelt, liegt kein Funktionsgraph vor, da $x = 0$ unendlich viele y-Werte zugeordnet würden.

d) Bei c) – (i) wurde vor allem die Zuordnungsvorstellung aktiviert, da man von den gegebenen Werten ausgegangen ist und daraus Informationen gezogen hat.

➢ Aufgabe 4

a) Individuelle Lösungen möglich – hier ein Beispiel:
Aus dem Graphen kann man ablesen, dass Anton zunächst in der ersten Minute seines Weges zwei Kilometer zurücklegt. Das ist nicht zu Fuß, nicht mit dem Fahrrad, allenfalls auf der Autobahn mit einem Auto zu schaffen. Deshalb hier nun eine fiktive Geschichte aus der Zukunft:
Mit seinem Fluggerät fliegt Anton in der ersten Minute zu seinem Schulkameraden (Teilstück a), wartet dort zwei Minute bis dieser fertig ist (Teilstück b), dann fliegen sie etwas schneller in einer Minute die letzten drei Kilometer zur Schule (Teilstück c). Dort merkt Anton, dass er was zu Hause vergessen hat. Deshalb fliegt er ganz schnell in zwei Minuten die fünf Kilometer nach Hause zurück (Teilstück d). Dort ist er nach sechs Minuten wieder angekommen.

b) Teilstück a: $f_a(x) = 2x$
Teilstück b: $f_b(x) = 2$
Teilstück c: $f_c(x) = 3x - 7$
Teilstück d: $f_d(x) = -2.5x + 15$

c) Individuelle Lösungen möglich. So könnte man z.B den Graphen belassen, jedoch eine andere Skalierung der Achsen so wählen, dass z.B. ein Fußweg von Anton zur Schule erfasst wird.

➢ Aufgabe 5

(i) $f(x) = \frac{4}{3}x + \frac{1}{7}$ Schnittpunkt mit x-Achse: $-\frac{3}{28}$, Schnittpunkt mit y-Achse: $\frac{1}{7}$

(ii) Ermittelte Gerade lautet: $f(x) = -\frac{9}{7}x + \frac{44}{35}$

Schnittpunkt mit x-Achse (Nullstelle): $\left(\frac{44}{45}\middle|0\right)$

Schnittpunkt mit y-Achse: $\left(0\middle|\frac{44}{35}\right)$

(iii)Allgemein:

Schnittpunkt mit x-Achse (Nullstelle): $\left(x_1 - \frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}y_1\middle|0\right)$

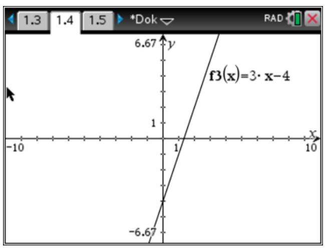
Schnittpunkt mit y-Achse: $\left(0\middle|y_1 - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1\right)$

➢ Aufgabe 6

a) Ja, es gibt lineare Funktionen, die proportional sind. Proportionale Funktionen sind besondere lineare Funktion mit dem y-Achsenabschnitt 0, ihre Graphen verlaufen durch den Ursprung.
b) Ja, der Graph jeder linearen Funktion ist eine Gerade. Das Besondere an lineare Funktionen ist ihr konstantes Wachstum. Folglich ist der Graph einer linearen Funktion eine Gerade.
c) Nein, nicht jede Gerade ist der Graph einer linearen Funktion. Die Aussage stimmt nur dann, wenn im Graphen einem x-Wert nicht mehrere y-Werte zugeordnet werden. Das liegt vor, wenn die Gerade eine Parallele zur y-Achse ist. Ist dies nicht der Fall, ist die Gerade also keine Parallele zur y-Achse, ist sie der Graph einer linearen Funktion.
d) Nein, nicht jede lineare Funktion ist bijektiv. Eine lineare Funktion ist nur dann bijektiv, wenn sie keine konstante Funktion (besondere lineare Funktion mit Steigung m=0) ist, alle anderen linearen Funktionen sind bijektiv.
e) Nein, nicht jede lineare Funktion besitzt eine Umkehrfunktion. Nur jede bijektive lineare Funktion besitzt eine Umkehrfunktion (vgl. d)).
f) Ja, jede lineare Funktion ist monoton fallend oder steigend. Hinweis: Konstante Funktionen sind monoton fallend oder steigend, da hierbei das Gleichbleiben eingeschlossen ist - jedoch sind sie nicht streng monoton fallend oder steigend.
g) Nein, nicht jede lineare Funktion ist streng monoton steigend und fallend, konstante Funktionen sind es nicht.
h) Ja, es gibt lineare Funktionen, die sowohl monoton steigend als auch fallend sind, es sind die konstanten Funktionen.

➢ Aufgabe 7

a)

<table>
<tr>
<td>Formal-symbolisch:
$f(x) = 3x - 4$</td>
<td>Numerisch-tabellarisch:
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>10</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>-4</td><td>-1</td><td>2</td><td>5</td><td>26</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Situativ-sprachlich:
Ich habe Schulden von 4€. Bekomme aber ab jetzt jeden Monat drei Euro Taschengeld von meiner Oma. Im ersten Monat (x=1) habe ich noch 1€ Schulden. Nach dem zweiten Monat (x=2) habe ich ein Guthaben von 2€. Pro Monat habe ich also eine Steigerung von 3€.</td>
<td>Graphisch-visuell:


</td>
</tr>
</table>

b)

(i) Beh: Für proportionale Funktionen gilt: $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$
Bew: Für proportionale Funktionen gilt: $f(x) = m \cdot x$
Somit gilt: $f(x_1) + f(x_2) = m \cdot x_1 + m \cdot x_2 = m \cdot (x_1 + x_2) = f(x_1 + x_2)$) qed

(ii) Beh: Für proportionale Funktionen gilt: $f(x) \cdot a = f(x \cdot a)$
Bew: Für proportionale Funktionen gilt: $f(x) = m \cdot x$
Somit gilt: $f(x) \cdot a = m \cdot x \cdot a = m \cdot a \cdot x = f(x \cdot a)$ q.e.d.

(iii) Beide Aussagen gelten nicht für lineare Funktionen $f(x) = m \cdot x + b$
Beh: $f(x_1) + f(x_2) \neq f(x_1 + x_2)$, wenn $b \neq 0$
Bew: $f(x_1) + f(x_2) = m \cdot x_1 + b + m \cdot x_2 + b = m \cdot (x_1 + x_2) + 2b \; f(x_1 + x_2) =$

$m \cdot (x_1 + x_2) + b$
Damit $f(x_1) + f(x_2) \neq f(x_1 + x_2)$ – Die Terme unterscheiden sich um einen Summanden b

Beh: Für lineare Funktionen gilt $f(x) \cdot a \neq f(x \cdot a)$ für a ≠ 1
Bew: Für lineare Funktionen gilt: $f(x) = m \cdot x + b$:

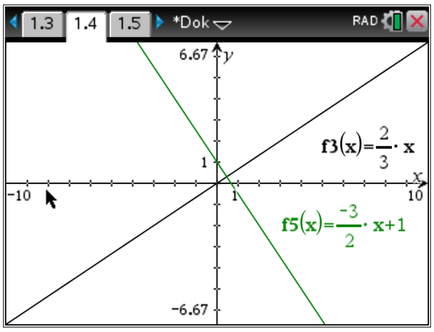
$$f(x) \cdot a = (m \cdot x + b) \cdot a = m \cdot x \cdot a + b \cdot a$$

$$f(x \cdot a) = m \cdot x \cdot a + b = m \cdot x \cdot a + b$$

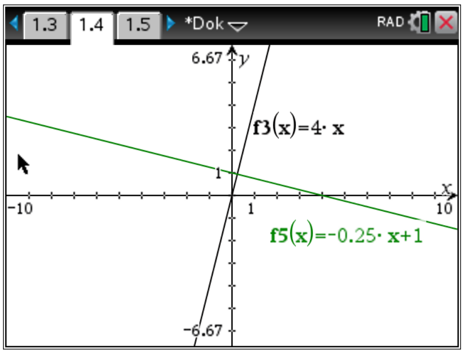
Damit $f(x) \cdot a \neq f(x \cdot a)$ q.e.d.

➢ Aufgabe 8

a)



b) Individuelle Lösungen möglich, z.B. hier ein weiteres Paar orthogonaler linearer Funktionen



c) Zwei lineare Funktionen sind immer dann orthogonal zueinander, wenn das Produkt beider Steigungen -1 ist, d.h. : $m1 \cdot m2 = -1$. Dies erkennt man daran, wenn man im Schnittpunkt ein Steigungsdreieck um 90° dreht und die jeweiligen Koordinaten abliest.

d) Gegenseitige Lage der Geraden:
   - Geraden zu f(x) und g(x) sind parallel zueinander (gleiche Steigung).
   - Geraden zu h(x) und i(x) stehen senkrecht zu einander, da das Produkt ihrer Steigungen (-1) ergibt.
   - Geraden zu j(x) und i(x) sind identisch

e) Funktionsgleichung, deren zugehörige Gerade zur Geraden mit $j(x) = 2(x + 1) - 3 = 2x - 1$ orthogonal steht:
Eine mögliche Gleichung lautet: $z(x) = -\frac{1}{2}x + 4$, allgemein: $z(x) = -\frac{1}{2}x + b$

➢ Aufgabe 9

a) Funktionsgleichung: $f(x) = 2{,}10€x + 5{,}40€$, dabei gibt f(x) den Preis der gesamten Taxifahrt in € in Abhängigkeit von der Anzahl der gefahrenen km (x) dar. Die Anzahl der km (x) ist die unabhängige und der Preis (f(x)) die abhängige Größe, x die unabhängige und f(x) die abhängige Variable.

b) Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \frac{x-3{,}40}{2{,}10}$
Die Umkehrfunktion beschreibt in diesem Kontext, wie viele Kilometer ich mit dem Taxi fahren kann in Abhängigkeit von einem gegebenem Gesamtpreis. Die unabhängige Variable ist x und steht hier für den Preis in € und die abhängige Variable ist f(x) und steht für die gefahrene Strecke in km.

c) Die Umkehrfunktion zu f (aus a)) existiert, da es sich um eine lineare Funktion handelt, die nicht konstant ist und damit bijektiv ist.

➢ Aufgabe 10

a) Möglicher Ansatz: Bei wie vielen Besuchern (x) beim neuen Preis von 12 € nimmt man genau so viel Geld ein wie aktuell bei 40 Besuchern und dem höheren Preis von 14 €):
$40 \cdot 14€ = (14€ - 2€) \cdot x,$
Man erhält für x kommt x=46,666. Somit würden die Einnahmen bei 47 Personen, die einen Kartenpreis von 12€ zahlen, steigen. Es müssen also 7 Personen mehr kommen, damit die Einnahmen steigen.

b) Individuelle Lösungen möglich, da die Aufgabenstellung sehr vage ist. Es müssen sowohl bestimmte Rahmenbedingungen (z.B. Anzahl Familien in Deutschland, Anzahl Autos in Deutschland) eruiert und vor allem relevante Fragestellungen ergänzt werden, um eine Gleichung aufstellen zu können.
Z.B. Laut Statista (de.statista.com) gibt es:
- ca. 13 Millionen Familien in Deutschland (incl. Haushalte von Alleinerziehenden),
- ca. 44 Millionen Single-Haushalte
- 43 Millionen PWs in privaten Haushalten

Geht man nun davon aus, dass die 5% der Familien kein Auto haben, die Hälfte der Single-Haushalte kein Auto haben, gibt es 8,65 Millionen Familien-Haushalte mit Autos. $(43\,000\,000 - 0.95 \cdot 13\,000\,000 - 22\,000\,000 = 8\,650\,000)$
Den Anteil der Familien mit zwei Autos (x) an diesen 8,65 Millionen kann man berechnen über:
$$8\,650\,000 = x * 8\,650\,000 + (0{,}95 - x) \cdot 8\,650\,000$$

c) Anna und Lotta: $A + L = 1{,}10€ \ und \ A = L + 1€$ → Lotta hat 0,05€ und Anna 1,05€.

➢ Aufgabe 11

a) $2a + 6b = 8$

b) ii. $4x - 6 = 8$, für x ergibt sich x=$\frac{4}{14}$. Somit liegt der Punkt P($\frac{4}{14}$/8) auf der Geraden. Als Steigung kann man der Gleichung m=4 entnehmen. Aus einem Punkt und der Geraden lässt sich eine lineare Gleichung nach dem bekannten Muster aufstellen: $f(x) = 4x + \frac{48}{7}$

c) iv. $4x - (x - 2) + (3 - x) = 9(x + 1)$

➢ Aufgabe 12

i.) $\boldsymbol{2k + 3l = 9\ und\ k - 4l = 2}$

1. Einsetzungsverfahren (Dazu muss die zweite Gleichung zunächst mit 4l addiert werden.
2. Additionsverfahren (Dazu muss die zweite Gleichung zunächst mit (-2) multipliziert werden.

➔ Ergebnis: k=3,8 ($\frac{42}{11}$) und l=0,454545 ($\frac{5}{11}$)

ii.) $\boldsymbol{3m = 12 + 6n\ und\ m = 6 - n}$

1. Einsetzungsverfahren
2. Additionsverfahren (Dazu muss die zweite Gleichung zunächst mit (-3) multipliziert werden.

➔ Ergebnis: m=5,34 ($\frac{16}{3}$) und n=0,6666 ($\frac{2}{3}$)

(iv) $\boldsymbol{2d + 3e = 9 - d + 12\ und\ 7d - 6e = 4 + 2e}$

1. Additionsverfahren (Dazu muss die erste Gleichung mit 2 multipliziert werden.)
2. Einsetzungsverfahren

➔ Ergebnis: e= 3 und d=4

➢ Aufgabe 13

a. Wenn man beim Basketball mit 7 Würfen 16 Punkte holt, wie viele Würfe mit zwei Punkten und wie viele mit drei Punkten hat man getroffen?

1. Tabelle

	0 3er	1 3er	2 3er	3 3er	4 3er
0 2er	0	3	6	9	12
1 2er	2	5	8	11	14
2 2er	4	7	10	13	16
3 2er	6	9	12	15	18
4 2er	8	11	14	17	20
5 2er	10	13	**16**	19	22

Es werden also 5 2er-Würfe und 2 3er-Würfe getroffen.

2. Lineares Gleichungssystem:

$$2x + 3y = 16\ und\ x + y = 7$$

➔ Ergebnis: x=5 und y=2

➔ X steht für die Anzahl der getroffenen 2-er Würfe und y für die getroffenen 3-er Würfe.

b. Wie viel Zitronensprudel muss zu 0,5L Bier mit 5% dazu gemischt werden, um ein Alsterwasser mit einem Alkoholgehalt von 3% zu erhalten?

0,5L=500 ml
5% von 500 ml
pw= $\frac{p \cdot G}{100} = \frac{5 \cdot 500}{100} = 25\, ml$
G_{neu}= $\frac{pW}{p} \cdot 100 = \frac{25}{3} \cdot 100 = 833{,}33ml$
833,33 ml – 500 ml = **333,33 ml**

c. Mit dem Fahrrad unterwegs. Mark fährt um 9 Uhr in Adorf Richtung Bdorf los und fährt mit 20 km/h. Barbara fährt im 30 km entfernten Bdorf um 9.20 Uhr in Richtung Adorf los und fährt 20 km/h. Wo treffen sie sich?

Tempo Mark: 20 km/h
Tempo Barbara: 25 km/h
Zeit Mark= $x + \frac{1}{3}$
Zeit Barbara= x
Strecke: 30 km

$$\left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot 20 + x \cdot 25 = 30$$

➔ $20x + \frac{20}{3} + 25x = 30$
➔ $45x = \frac{70}{3}$
➔ $x = 0{,}52$

0,52 Stunden nach Barbaras Start treffen sie sich. Mark ist dann 17 km und Barbara 13 km gefahren.