Funktionen

Check-out

➢ Aufgabe 1

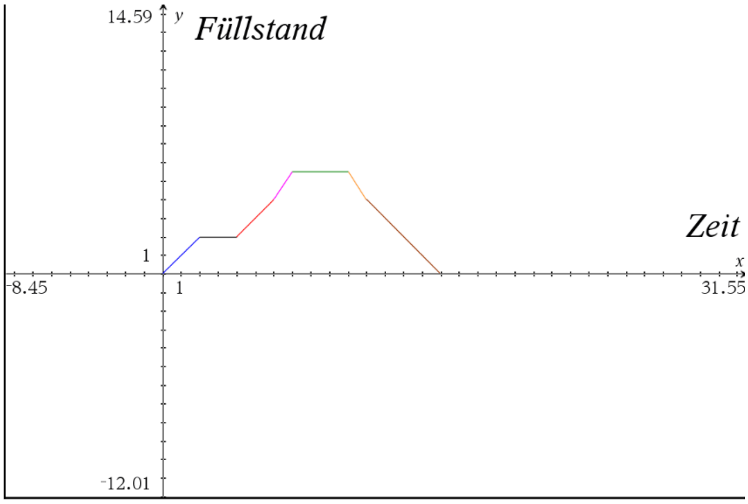
a) Denkbar ist, dass es zwei Personen auf dem Konzert gibt, die zwar dieselbe Körpergröße jedoch unterschiedliche Schuhgröße haben. In diesem Fall würde eine entsprechende Zuordnung einer Körpergröße zwei verschiedene Schuhgrößen zuordnen. Entsprechend wäre die Eindeutigkeitseigenschaft einer Funktion verletzt.
b) Jeder Lernende sollte eine eindeutige Note erhalten haben. Entsprechend handelt es sich um eine Funktion. Dass zwei SchülerInnen ggfs. dieselbe Note erhalten haben, stellt kein Problem dar.
c) Zu jedem Zeitpunkt sollte ein Zug eine eindeutige Position haben. Entsprechend handelt es sich auch hier um eine Funktion. Auch wenn der Zug einmal rückwärts aus einem Sackbahnhof herausfährt, stellt dies kein Problem dar, da er zwar dann zu zwei verschiedenen Zeitpunkten dieselbe Position hat, jedoch zu jedem Zeitpunkt weiterhin eine eindeutige Position existiert.
d) Auch hier steht dem Funktionsbegriff nichts im Wege. Für jedes Fahrzeug wird von der Zoll-Verwaltung ein eindeutiger jährlicher Steuersatz erhoben.
e) Auch dieser Zusammenhang liefert eine Funktion. Uneindeutige Kontostände für ein und dieselbe Bankverbindung wären wohl ein großes Problem.
f) Hier ergibt sich ein Problem, wenn z.B. eine Person zwei Fahrzeuge besitzt. In diesem Fall wäre das entsprechende Bild unter dieser Abbildung dann uneindeutig.

➢ Aufgabe 2

Für beide Teilaufgaben macht es Sinn, die Zusammenhänge der vorangegangenen Aufgaben einmal in entgegengesetzter Richtung zu durchdenken. Handelt es sich z.B. um eine Funktion, wenn man nicht den Besitzern die Fahrzeuge, sondern jedem Fahrzeug seinen Besitzer zuordnet? Was passiert, wenn man jedem möglichen Steuerbetrag ein zugehöriges Kennzeichen zuordnet?

➢ Aufgabe 3

Ein entsprechender Graph könnte z.B. wie folgt aussehen. Hierbei sind die einzelnen Abschnitte farblich hervorgehoben.



➢ Aufgabe 4

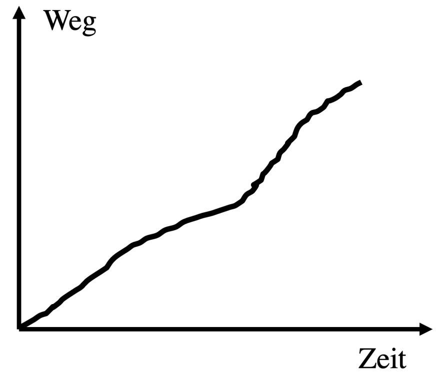
Für diese Aufgabe ist es wichtig, nur in den Anzahlen der Bodenberührungen und somit der einzelnen Sprünge des Flummis zu denken. Entsprechend sind hierbei als Funktionsargumente nur die natürlichen Zahlen (sowie die 0) relevant. Für die Funktion nutzen wir den Buchstaben f. Bei 0 Bodenkontakten beträgt die maximale Höhe 32 m, so dass $f(0) = 32$ gelten muss. Die Höhe halbiert sich nach jedem Sprung, so dass $f(1) = 16$, $f(2) = 8$, $f(3) = 4$, usw. gilt. Als Funktionsgleichung kann man somit $f(x) = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{32}{2^x}$ notieren. Durch Einsetzen in die Gleichung kann man die Lösung zusätzlich kontrollieren.

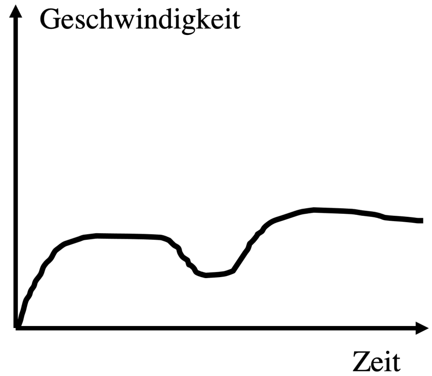
➢ Aufgabe 5

a) Denkbar ist etwas ein Läufer, der während des gesamten Laufs beschleunigt und im Ziel rasant abbremst. Noch passender ist zum Beispiel sog. „Drag Racing“, wo es darum geht, dass Autos auf kurzer Distanz möglichst stark beschleunigen. Häufig werden sie danach durch einen Fallschirm schlagartig abgebremst (s. Abbildung).

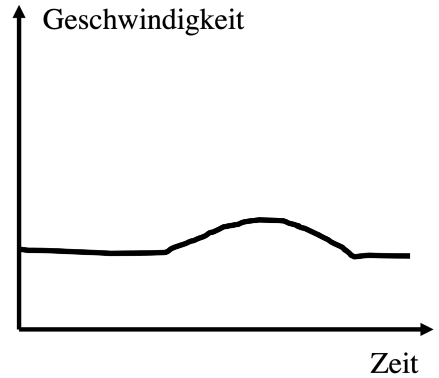
b) Die Schülerinnen und Schüler haben einen Fehler begangen – und zwar den sog. Graph-als-Bild-Fehler. Eine genauere Erläuterung zu diesem Fehlermuster findet sich in Abschnitt 2.5.4.

c) Die beiden geforderten Diagramme könnten in etwa wie folgt aussehen:





d) Ein Schüler, der zuvor Angeln geantwortet hat, würde hier evtl. auch den Graph-als-Bild-Fehler begehen. Dieser könnte dann (für beide Diagramm-Arten) möglicherweise wie folgt aussehen:



➢ Aufgabe 6

Schaubild f stellt eine Funktion dar, die surjektiv ist, da jedes Element der Zielmenge mindestens einmal getroffen wird. Schaubild g stellt hingegen keine Funktion dar, da für den obersten roten Kreis der Definitionsmenge kein Bild vorgesehen ist. Schaubild h stellt wieder eine Funktion dar. Hier wird jedes Element der Zielmenge sogar genau einmal getroffen. Die Funktion ist somit injektiv und surjektiv zugleich und daher bijektiv.

➢ Aufgabe 7

a) Innermathematisches Beispiel: Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^2$ ist surjektiv, da jedes Element der Zielmenge mindestens einmal getroffen wird. Die Zielmenge sind die positiven reellen Zahlen sowie 0, welche bis auf 0 allesamt zweimal von einer positiven und einer negativen Zahl getroffen werden. Die Zahl 0 hingegen wird nur von 0 getroffen. Die Funktion ist nicht injektiv, da hierfür jedes Element der Zielmenge höchstens einmal getroffen werden dürfte.
Außermathematisches Beispiel: Alle Menschen an einer Autobahnraststätte, die man nur mit dem Pkw erreichen kann, bilden die Definitionsmenge. Die dort parkenden Autos die Zielmenge. Die Zuordnung von jeder Person zum Auto, mit welchem diese gekommen ist, bildet nun eine Funktion, da für jede Person ein eindeutiges Fahrzeug existiert. Sofern nun

mindestens zwei Personen sich ein Auto geteilt haben, ist diese Funktion surjektiv aber nicht injektiv.

b) Innermathematisches Beispiel: Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ ist injektiv, da jede positive Zahl einmal, jede negative Zahl der Zielmenge und die 0 keinmal getroffen werden. Somit wird jede Zahl höchstens einmal getroffen. Sie ist ferner nicht surjektiv, da nicht jede Zahl mindestens einmal getroffen wird.
Außermathematisches Beispiel: Auf einen Parkplatz fahren viele Autos. Jeder einzelne Stellplatz kann nur von maximal einem Fahrzeug belegt werden. Die Zuordnung zwischen Autos und Stellplatz ist eine Funktion, da jedes Auto einen eindeutigen Stellplatz besitzt. Einzelne Stellplätze können jedoch leer bleiben. Aus diesem Grund ist die Funktion injektiv aber nicht surjektiv.

c) Innermathematisches Beispiel: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -x$ ist bijektiv. Jede Zahl wird genau einmal getroffen, nämlich von sich selbst mit umgekehrten Vorzeichen.
Außermathematisches Beispiel: Jeder Mensch erhält in Deutschland mit Geburt eine Steueridentifikationsnummer, die ihn oder sie gegenüber dem Finanzamt eindeutig identifiziert. Die Zuordnung zwischen allen Deutschen und der Menge der vergebenen Steueridentifikationsnummern ist daher bijektiv.

➢ Aufgabe 8

a) Hier steht die Art des Wachstums im Mittelpunkt der Aufgabe. Daher steht der Kovariationsaspekt im Vordergrund.

b) Hier steht die generelle Form des Funktionsgraphs im Mittelpuntk der Aufgabe. Daher steht der Objektaspekt im Vordergrund. Zur Identifikation der einzelnen Punkte auf dem Graphen (d.h. welche Entfernung welcher Höhe *zugeordnet* wird) ist der Zuordnungsaspekt zusätzlich relevant.

c) Diese Aufgabe lässt sich lösen, wenn man die drei Punkte (bzw. die entsprechenden x- und y-Koordinaten) in eine prototypische quadratische Funktionsvorschrift einsetzt und über die hergeleitete Vorschrift schließlich einen vierten Punkt (durch Einsetzen in x) identifiziert. Man kann daher argumentieren, dass hier der Zuordnungsaspekt im Vordergrund steht.

➢ Aufgabe 9

Werden Sie kreativ. Mit der vorangegangenen Aufgabe liegen Ihnen ja bereits Anregungen vor!